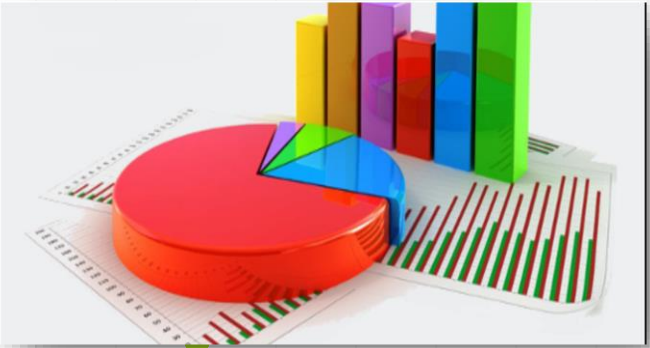
Estatística I

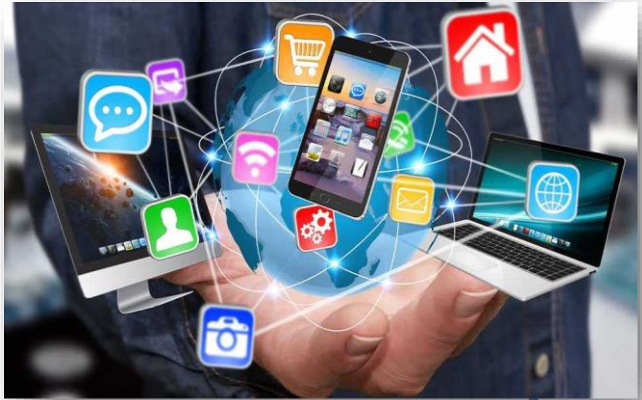
Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aula Teórico-Prática N.º 20
(Semana 11)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	**Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1 Distribuição Poisson

Variáveis Aleatórias Discretas

Distribuição de Poisson

Representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que registra o número de ocorrências num determinado intervalo de tempo ou espaço.

- Carros que passam por minuto num cruzamento, durante uma dada hora do dia.
- Erros tipográficos por página num material impresso.
- Defeitos numa peça fabricada por unidade (m^2, m, etc).
- Lâmpadas queimadas numa cidade por dia.
- Problemas de filas de espera.

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson

Se X é uma v.a. que regista o número de ocorrências num determinado intervalo e a probabilidade de uma ocorrência é independente e a mesma para quaisquer dois intervalos de tempo, então a v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ e a sua função massa de probabilidade é dada por:

Formulário

- **POISSON** $X \sim \text{Po}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$

  $f(x \mid \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$; $E(X) = \lambda$; $\text{Var}(X) = \lambda$; $M_X(s) = \exp\{\lambda(e^{s} - 1)\}$; $\gamma_1 = \lambda^{-1/2}$

  Propriedades:

  - $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2)$, X_1 e X_2 independentes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$
  - Se $X \sim B(n;\theta)$, com n grande θ pequeno então $X \overset{a}{\sim} \text{Po}(n\theta)$

λ = valor esperado ou número médio de ocorrências num dado intervalo.

e = 2,71828 (Número de Euler)

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson

- **Notação:** $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ indica que v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ.

- Uma v.a de Poisson não tem limite superior: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

- $P(X = x \mid \lambda)$ = à probabilidade de x ocorrências num determinado intervalo, sendo λ o número médio de ocorrências em tal intervalo.

- O valor médio e a variância de X são:

$$\text{Média: } E(X) = \lambda$$
$$\text{Variância: } \text{Var}(X) = \lambda$$

[Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)]

Processo de Poisson e Distribuição de Poisson

Num **processo de Poisson**, os acontecimentos ocorrem a uma taxa média de λ por unidade de tempo, o número de ocorrências num intervalo de amplitude t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt

$$f(x \mid \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,\ldots \quad (\lambda > 0).$$

Soma de Poisson independentes

- Teorema 5.3 – Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes. Então,

  $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1),\ X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

Em média há 2 chamadas por hora em um certo telefone. Calcule a probabilidade de:

a) receber nenhuma chamada em 1 horas.

b) receber uma chamada em 1 horas.

c) receber uma chamada em 2 horas.

d) receber no máximo 1 chamadas em 2 horas.

e) receber pelo menos 1 chamadas em 2 horas.

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

X = número chamadas por hora em um certo telefone
$\lambda = 2$ chamadas por hora

a) $P(X = 0|\lambda = 2) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,1353$

b) $P(X = 1|\lambda = 2) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,2706$

c) $P(X = 1|\lambda = 4) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0732$

d) $P(X \leq 1|\lambda = 4) = P(X = 0|\lambda = 4) + P(X = 1|\lambda = 4)$
$= \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0183 + 0,0732 = 0.0915$

e) $P(X \geq 1|\lambda = 4) = 1 - P(X < 1|\lambda = 4)$
$= 1 - P(X = 0|\lambda = 4) = 1 - 0,0183 = 0,9817$

Distribuição de Poisson: Exemplo 2

Outro exemplo:

X = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência numa hora

$$X \sim \text{Poisson}(30)$$

Y = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência em 4 horas (20h - 24h),

$$Y \sim \text{Poisson}(30 \times 4) = \text{Poisson}(120)$$

[Errado: $\cancel{Y = 4X}$] $Y \sim \text{Poisson}(4\lambda)$

Distribuição de Poisson: Resumindo...

A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta que se aplica quando ocorre um acontecimento num *intervalo especificado*. A variável aleatória *X* representa o nº de ocorrências num determinado intervalo. O intervalo pode se referir a tempo, distância, área, volume, ou algum tipo de medida similar.

[PDF] Capítulo 3 Modelos Estatísticos - Free Download PDF (silo.tips)

Distribuição de Poisson vs. Distribuição Binomial

A distribuição de Poisson difere da distribuição binomial nos seguintes aspectos fundamentais:

- **A distribuição binomial é caracterizada pela dimensão da amostra *n* e pela probabilidade de sucesso *p*, enquanto que a distribuição de Poisson é caracterizada apenas pela média μ.**

- **Numa distribuição binomial, os valores que a variável aleatória *X* pode tomar são 0, 1, . . . *n*, enquanto que na distribuição de Poisson a variável *X* toma os valores 0, 1, . . . , sem limite superior.**

[PDF] Capítulo 3 Modelos Estatísticos - Free Download PDF (silo.tips)

Lei dos Acontecimentos Raros: Binomial para a Poisson

Quando $\theta = \lambda / n \to 0$, mantendo-se fixo $n\theta = \lambda$, a binomial tende para a Poisson,

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^x}{x!}.$$

A **regra prática** para utilizar esta "lei" baseia-se no pressuposto de que se tem um acontecimento raro e um número "elevado" de observações.

Assim, **não é aconselhável** fazer a aproximação quando:

$0.1 < \theta < 0.9$ (quando $\theta \geq 0.9$, evidentemente que o acontecimento em causa não é "raro", mas sim o seu complementar)

$n \leq 20$ (que são os valores de n considerados na tabela 1).

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Poisson: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

2

3.11 Um processo de fabrico de placas de vidro produz, em média, 4 bolhas de ar espalhadas aleatoriamente por 10 m^2 de placa. Sabendo que a distribuição do número de bolhas de ar pode ser modelada por uma distribuição de Poisson, calcule a probabilidade de:

(a) Uma placa de $2.5m \times 2m$ ter mais de 2 bolhas de ar.

(b) Obter, num lote de 10 placas de vidro com $1m \times 2.5m$, 6 placas perfeitas.

Exercício 3.11 (a): Distribuição de Poisson

- **V.a.**

  X_{10} = no. de bolhas de ar espalhadas aleatoriamente por $10m^2$ de placa

- **Distribuição de X_{10}**

$$X_{10} \sim \text{Poisson}(\lambda_{10})$$

  com

$$\lambda_{10} \quad : \quad E(X_{10}) = 4$$
$$\lambda_{10} = 4$$

- **Nova v.a.**

  X_5 = no. de bolhas de ar espalhadas aleatoriamente numa placa de $2.5m \times 2m$

$X \sim$ Poisson(4)

Unidade = 10 m^2

$X \sim$ Poisson(2)

Unidade = 5 m^2

Exercício 3.11 (a): Distribuição de Poisson

- **Distribuição de** X_5

  Invocando a propriedade reprodutiva da distribuição de Poisson (ver Nota 6.64 das notas de apoio), conclui-se que:

$$X_5 \sim \text{Poisson}(\lambda_5)$$

  onde

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= E(X_5) \\ &= \frac{\lambda_{10}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$X \sim \text{Poisson}(2)$

Unidade = 5 m^2

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, \ldots$$

- **F.p. de** X_5

  $P(X_5 = x) \overset{form.}{=} \frac{e^{-2} \times 2^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X_5 > 2) &= 1 - P(X_5 \leq 2) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X_5 = x) \\ &= 1 - F_{Poisson(2)}(2) \\ &\overset{tabela/calc.}{=} 1 - 0.6767 \\ &= 0.3233. \end{aligned}$$

Exercício 3.11 (a): Distribuição de Poisson

$X \sim Poisson(2)$

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1.0000	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	[illegible]
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	[illegible]

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.379	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	.649	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	.838	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	.9379	.9275	.9162	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318	.8153
5	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258	.9161
6	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713	.9665
7	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901	.9881
8	.9997	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969	.9962
9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$

Exercício 3.11 (b): Distribuição de Poisson

- **Outra v.a.**

  Y = número de placas perfeitas (sem bolhas!), em 10 placas de vidro com $1m \times 2.5m$

- **Distribuição de Y**

$$Y \sim \text{binomial}(n, p)$$

com

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ p &= P(\text{placa de } 1m \times 2.5m \text{ perfeita}) \\ &= P(X_{2.5} = 0) \\ &= \frac{e^{-\lambda_{2.5}} \times \lambda_{2.5}^0}{0!} \\ &= e^{-\lambda_{10}/4} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

$X \sim$ Poisson(1)

Unidade = 2.5 m^2

Exercício 3.11 (b): Distribuição de Poisson

- **F.p. de Y**

  $P(Y=y)=\binom{10}{y}\left(e^{-1}\right)^y\left(1-e^{-1}\right)^{10-y}$, $y=0,1,2,\ldots,10$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y=6) &= \binom{10}{6}\left(e^{-1}\right)^6\left(1-e^{-1}\right)^{10-6} \\ &\simeq 0.083110. \end{aligned}$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$x=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=np \qquad Var(X)=np(1-p)$$

Distribuição Poisson: Exercícios do Murteira et al (2015)

3

Variáveis Aleatórias Discretas

20. O número de erros de ortografia que um aluno dá por página, numa prova escrita de Estatística, segue um processo de Poisson com taxa média de 1.5 erros.

a) Qual a percentagem de provas de duas páginas sem erros de ortografia?
b) Se um aluno escreveu quatro páginas, qual a probabilidade de ter cometido mais de 8 erros?
c) Escolhidas ao acaso cinco provas de quatro páginas cada, qual a probabilidade de apenas uma delas não ter erros de ortografia?
d) Numa prova com seis páginas contaram-se dez erros, qual a probabilidade de metade deles estarem nas duas primeiras páginas?

Exercício 20 (a)

X - v.a. nº erros por página $\rightarrow$ $X \sim Po(1.5)$

$\hookrightarrow \lambda = 1.5 \rightarrow$ média : $E(x)$

(a)

Y - v.a. nº erros em 2 páginas $\rightarrow$ $Y \sim Po(2\lambda) = Po(3)$

$P(Y = 0) = 0.0498$

Exercício 20 (b)

Z - v.a. nº erros em 4 páginas $\longrightarrow$ $Z \sim Po(4\lambda) = Po(6)$

$P(Z>8) = 1 - P(Z \leq 8) = 1 - 0.8472 = 0.1528$

Exercício 20 (c)

Num conjunto de 5 provas (de 4 páginas) apenas uma não ter erros → Binomial

W - v.a. nº provas (de 4 páginas) sem erros num conjunto de 5

$W \sim B(n, \theta)$, onde: $\begin{cases} n = 5 \\ \theta = P(\underbrace{Z = 0}_{\text{prova 4 pág. sem erros}}) = 0.0025 \end{cases}$ → $W \sim B(5, 0.0025)$

$P(W = 1) = 0.0124$

Exercício 20 (d)

X_i - nº erros por página $(i=1,2,\dots,6)$ $\rightarrow X_i \sim Po(1.5)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{2} X_i = 5 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right) = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{2} X_i = 5 \wedge \sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{2} X_i = 5 \wedge \sum_{i=3}^{6} X_i = 5\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right)} \overset{X_i \text{ ind.}}{=}$$

$$= \frac{P\left(\sum_{i=1}^{2} X_i = 5\right) P\left(\sum_{i=3}^{6} X_i = 5\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right)}$$

Exercício 20 (d)

- $\sum_{i=1}^{2} X_i \sim Po(1.5+1.5) = Po(3) \quad \rightarrow \quad P\left(\sum_{i=1}^{2} X_i = 5\right) = 0.1008$
- $\sum_{i=3}^{6} X_i \sim Po(1.5+1.5+1.5+1.5) = Po(6) \quad \rightarrow \quad P\left(\sum_{i=3}^{6} X_i = 5\right) = 0.1606$
- $\sum_{i=1}^{6} X_i \sim Po(1.5+1.5+1.5+1.5+1.5+1.5) = Po(9) \quad \rightarrow \quad P\left(\sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right) = 0.1186$

Logo,

$$P\left(\sum_{i=1}^{2} X_i = 5 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{6} X_i = 10\right) = \frac{0.1008 \times 0.1606}{0.1186} \approx 0.1365$$

Obrigada!

Questões?