



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 20 e 21 (Semana 11)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 2:**
Probabilidades

Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)

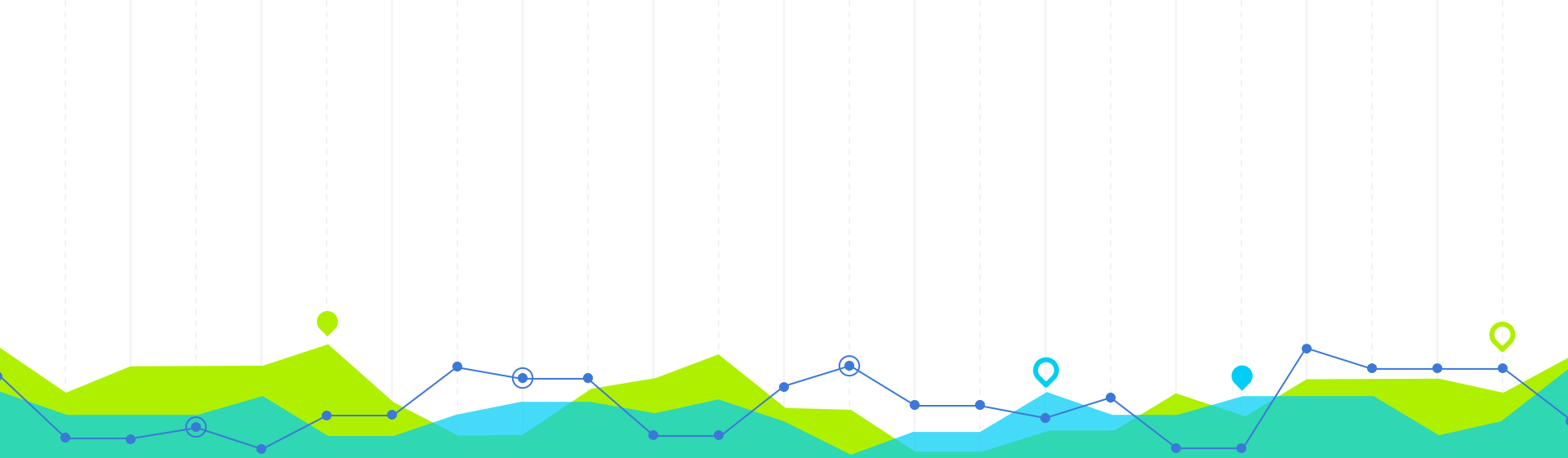
- **Capítulo 5:**
Distribuições Teóricas
- **Capítulo 6:**
Amostragem.
Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

Aula 18	Distribuição do tempo de espera até à primeira ocorrência de um processo de Poisson. Distribuição gama e distribuição do qui-quadrado. Teorema do limite central: enunciado e exemplo de aplicação.
Aula 19	Teorema de De Moivre Laplace. Aproximação de Poisson por normal.
Aula 20	Início do capítulo 5: probabilidade versus inferência estatística. Universo e amostra. Amostra aleatória. Estatísticas. Distribuição por amostragem.
Aula 21	Distribuição por amostragem do máximo e do mínimos amostrais. Momentos da média e da variância amostrais. Distribuição assintótica da média amostral. Uma população Bernoulli: distribuição do total da amostra e da média amostral.



Distribuição do Qui-Quadrado

Variáveis Aleatórias Contínuas

1

Distribuição do Qui-Quadrado: Função Densidade de Probabilidade

Definição: A v. a. contínua X segue uma **distribuição Qui-Quadrado** com n graus de liberdade, i. e., $X \sim \chi_n^2$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0, \quad n > 0,$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função **Gama**, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Distribuição do Qui-Quadrado: Função Densidade de Probabilidade

O parâmetro caracterizador desta distribuição é n .

Principais características:

- A v. a. só toma valores positivos;
- É uma função não simétrica.

A forma da distribuição depende dos graus de liberdade (Figura 5.12), tornando-se menos assimétrica com o aumento do número de graus de liberdade. Esta distribuição está tabelada (Anexo B).

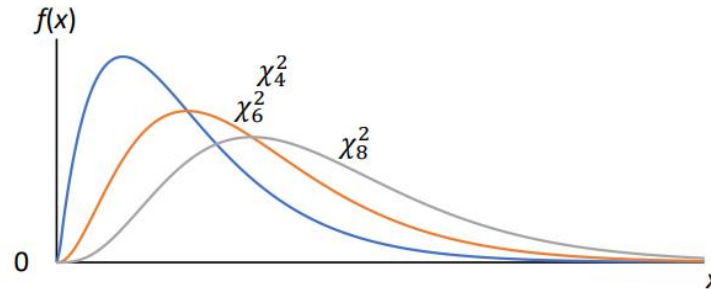


Figura 5.12: Função densidade de probabilidade distribuição Qui-Quadrado para diferentes graus de liberdade.

Distribuição do Qui-Quadrado

- A distribuição do qui-quadrado (χ^2) é uma distribuição de probabilidade contínua.
- É uma das distribuições de probabilidade mais usadas em inferência estatística – *ex.*, testes de hipóteses, construção de intervalos de confiança.
- A distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade ‘surge’ quando tomamos o quadrado de uma distribuição normal padrão.

(*i.e.*, a distribuição de uma soma de quadrados de n variáveis aleatórias independentes normalmente distribuídas)

- Se X tem uma distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade, escreve-se

$$X \sim \chi^2(n)$$

- A distribuição do qui-quadrado tem um parâmetro: n – nº de termos independentes num somatório de quadrados (*i.e.*, o número de X is)

Distribuição do Qui-Quadrado

- **Teorema da aditividade**

Se X_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) são variáveis aleatórias independentes e

se $X_i \sim \chi^2(n_i)$

então: $\Sigma X_i \sim \chi^2(m)$

(i.e., ΣX_i é uma distribuição do qui-quadrado com $m = \Sigma n_i$ graus de liberdade)

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- **Outros teoremas**

- Se Z tem uma distribuição normal padrão, então Z^2 tem distribuição do qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

$$Z^2 = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \cap \chi_{(1)}^2$$

- Se X_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média μ_i e desvio-padrão σ_i , então:

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \cap \chi_{(n)}^2$$

Distribuição do Qui-Quadrado

- É uma distribuição positiva e não simétrica.
- $E[X] = n$
- $\text{Var}[X] = 2n$
- Está tabelada para algumas probabilidades e $n \leq 30$.
- Quando $n > 30$, pode usar-se a aproximação à distribuição normal:

$$\sqrt{2} X - \sqrt{2n} \dot{\sim} N(0,1)$$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Se $X \sim \chi_n^2$, então $\mu_X = E(X) = n$ e $\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = 2n$.

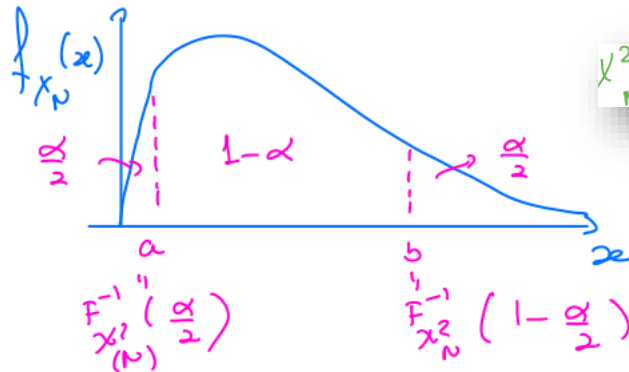
Usualmente utiliza-se a notação $\chi_{n; \alpha}^2$ para representar o quantil de probabilidade α de uma v. a. $X \sim \chi_n^2$.
Portanto, $\chi_{n; \alpha}^2$ corresponde ao menor valor k tal que $P(X \leq k) = \alpha$.

Distribuição do Qui-Quadrado: Resumo

Propriedades:

i) $f_{\chi^2_N}(x) > 0$ para $x > 0$

ii) não é uma distribuição simétrica



χ^2_N lê-se "distribuição do qui-quadrado com

N graus de liberdade

Distribuição do Qui-Quadrado

Formulário

- **QUI-QUADRADO** $X \sim \chi^2(n)$, (n inteiro positivo).

$$X \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow X \sim G(n/2; 1/2) ; E(X) = n ; \text{Var}(X) = 2n ; M_X(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}}, s < \frac{1}{2} ; \gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{n}} ; \gamma_2 = 3 + \frac{12}{n}$$

Propriedades:

- $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \chi^2_{(n)}$ com $n = \sum_{i=1}^k n_i$
- $X \sim G(n; \lambda) \Leftrightarrow 2\lambda X \sim \chi^2(2n)$
- $X_i \sim N(0,1)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow \sqrt{2X} - \sqrt{2n-1} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Distribuição Gama
(ver slides a seguir)



Distribuição do Qui-Quadrado: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.
2. Suponha que, $X \sim \chi^2_{(10)}$.
 - a) Quais os valores de a e b que garantem:
 $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$
 - b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.
 - c) Calcule $P[X > 30,6]$.
3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.



- Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.
- Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$:
 - Quais os valores de a e b que garantem:
 $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$
 - Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.
 - Calcule $P[X > 30,6]$.
- Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 1

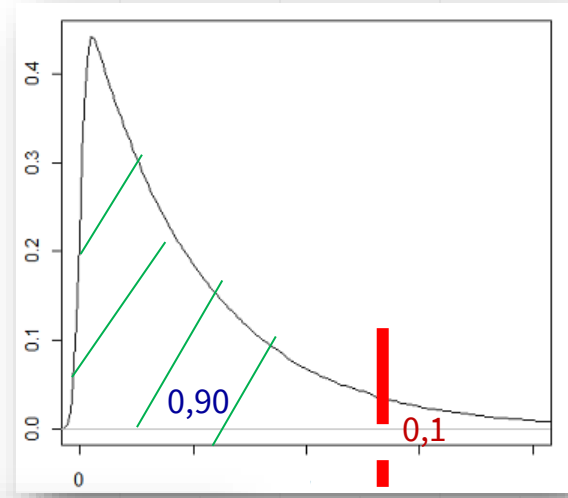
$$P(X \leq a) = 0,90 \Leftrightarrow a = F(0,90)^{-1} = 15,987$$

$$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n														
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Área total é igual a 1



1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garanta $P[X \leq a] = 0,9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$:

a) Quais os valores de a e b que garantem:

$$P[X < a] = 0,95 \text{ e } P[X > b] = 0,975$$

b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.

c) Calcule $P[X > 30,6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 2 a)

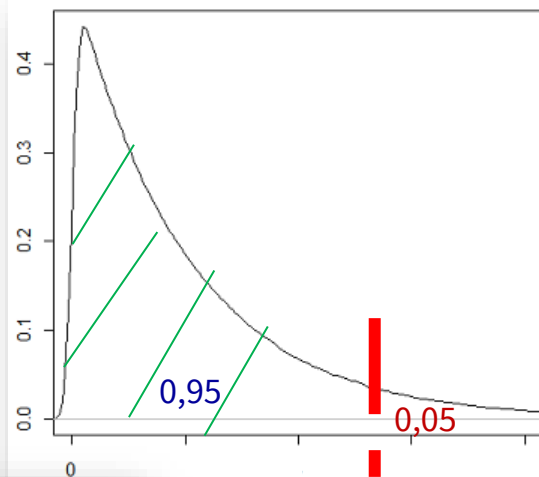
$$P(X < a) = 0,95 \Leftrightarrow a = F(0,95)^{-1} = 18,307$$

$$P(X > b) = 0,975 \Leftrightarrow b = F(0,025)^{-1} = 3,247$$

$$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Área total é igual a 1



$a?$

- Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.
- Suponha que: $X \sim \chi^2_{(10)}$.
 - Quais os valores de a e b que garantem:
 $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$
 - Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.
 - Calcule $P[X > 30,6]$.
- Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

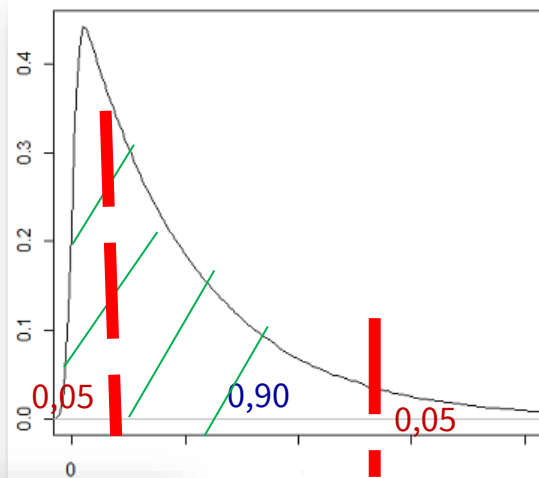
Exercício 2 b)

$P(c < X < d) = 0,90 \Leftrightarrow P(X < d) - P(X < c) = F(d) - F(c) = 0,90$
 Logo, tem-se $d = F(0,95)^{-1} = 18,307$ e $c = F(0,05)^{-1} = 3,940$

$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$

ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Área total é igual a 1

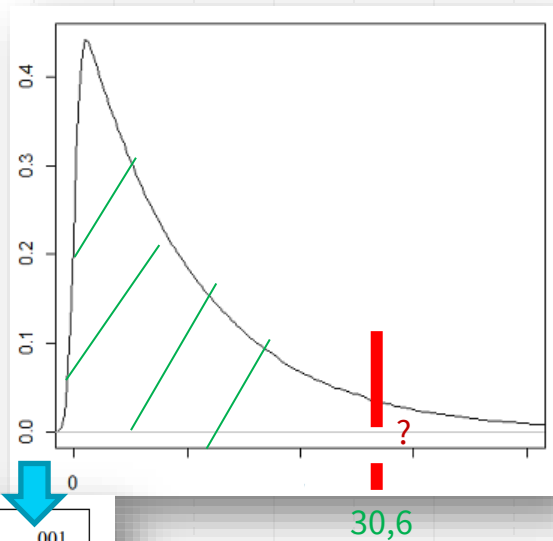


d?

- Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.
- Suponha que: $X \sim \chi^2_{(10)}$
 - Quais os valores de a e b que garantem:
 $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$
 - Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.
 - Calcule $P[X > 30,6]$.
- Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 2 c)

Área total é igual a 1



$$P(X > 30,6) \sim P(X > 29,588) = 0,001$$

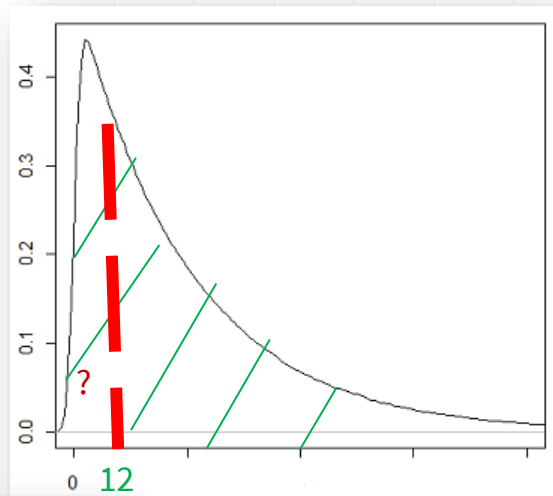
$$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n														
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

- Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garanta $P[X \leq a] = 0.9$.
- Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.
 - Quais os valores de a e b que garantem:
 $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$
 - Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.
 - Calcule $P[X > 30,6]$.
- Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 3

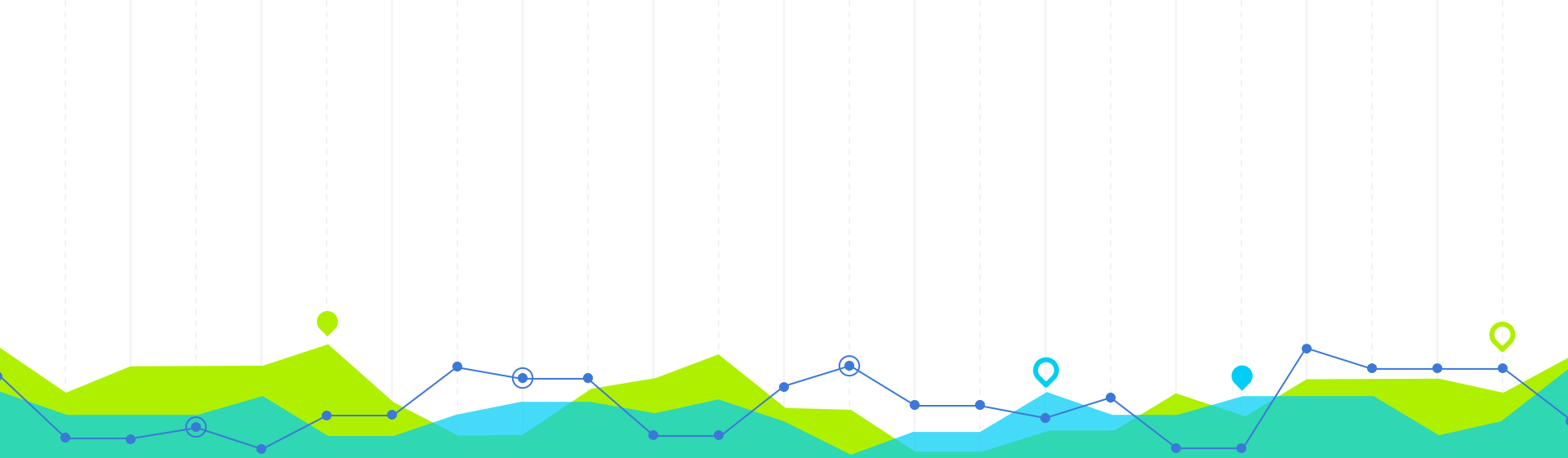
Área total é igual a 1



$P(Y < 12) \sim 1 - P(Y > 35,534) = 1 - 0,995 = 0,005$
 Alternativamente, pelo TLC (aproximação à distribuição Normal)
 $P(Y < 12) \sim P\left(\frac{Y-n}{\sqrt{2n}} < \frac{12 - 60}{\sqrt{120}}\right) = P(Z < -4,38)$
 $= \Phi(-4,38) = 1 - \Phi(4,48) \sim 1 - 0,999978 = 0,000022$ (ver mais à frente)

$$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n														
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334	77.577	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215	112.317
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	71.145	79.334	88.130	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839



Distribuição Gama

Variáveis Aleatórias Contínuas

3

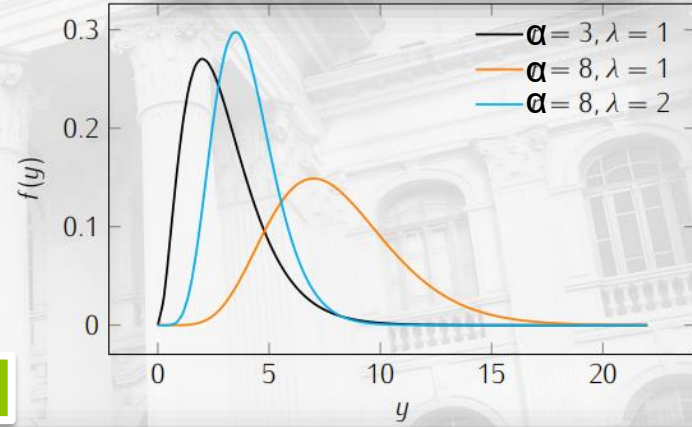
A distribuição exponencial prevê o tempo de espera até o **primeiro** evento. A distribuição gama, por outro lado, prevê o tempo de espera até que o evento **k-ésimo evento** ocorra.

Distribuição Gama

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

- ▶ Seja $Y_{Ei} \sim \text{Exp}(\lambda)$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) uma variável com distribuição Exponencial. Então, $Y = Y_{E1} + Y_{E2} + \dots + Y_{Ek}$ tem distribuição Gama.
- ▶ A Gama tem suporte no conjunto dos **reais positivos**, assumindo formas assimétricas.
- ▶ Ela tem aplicações na área de **confiabilidade** e análise de **sobrevivência**, assim como a Lognormal.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad n > 0,$$



Formulário

- **GAMA** $X \sim G(\alpha, \lambda)$, ($\lambda > 0, \alpha > 0$)

$$f(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0; \quad E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}; \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \quad M_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)^\alpha, \quad s < \lambda; \quad \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}; \quad \gamma_2 = 3 + \frac{6}{\alpha}$$

Propriedades:

- $X_i \sim G(\alpha_i; \lambda)$, ($i = 1, 2, \dots, k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i; \lambda\right)$
- $X \sim G(\alpha, \lambda)$ então $Y = cX \sim G\left(\alpha, \frac{\lambda}{c}\right)$ onde c constante positiva

Distribuição Gama: Exemplos

1. Soma de v.a. com distribuição Exponencial.
2. Tempo de carregamento de um navio.
3. Volume de chuva em dias com precipitação.
4. Tempo de permanência de um usuário em um site.
5. Distribuição de idade de animais em ambiente natural.
6. Tempo de vida de um paciente após transplante.
7. Distância dos passes de bola em um jogo de futebol.

Distribuição Gama: Função Densidade de Probabilidade

As **distribuições Exponencial** e **Qui-quadrado** são casos particulares de uma distribuição mais geral, a **distribuição Gama**.

Definição: A v. a. contínua X segue uma distribuição Gama com parâmetros α e λ , i. e., $X \sim G(\alpha; \lambda)$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad n > 0,$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

O parâmetros caracterizadores desta distribuição são α e λ .

Distribuição Gama: Função Gama

Para cada número positivo α , seja $\Gamma(\alpha)$ definido como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

- ▶ $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$
- ▶ Se $\alpha > 1$, então $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- ▶ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- ▶ $\Gamma(n) = (n - 1)!$, n inteiro positivo.

Distribuição Gama: Relação com outras Distribuições

- ▶ A distribuição Gama tem como **caso particular** a distribuição exponencial (λ) ao fixarmos $\alpha = 1$.
- ▶ Dessa relação, a Gama pode ser obtida como o **tempo acumulado** para k eventos de Poisson, uma vez que o intervalo entre eventos é Exponencial.
- ▶ A Gama tem mais variedades de formas por ter 2 parâmetros, permitindo modelar adequadamente um maior número de variáveis aleatórias que a Exponencial.
- ▶ A **soma** de v.a. Gama é Gama, ou seja, se Y_1, Y_2, \dots, Y_k são variáveis aleatórias independentes, com distribuição Gama de parâmetros α e λ , então

$$Y_{\text{soma}} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k \sim \text{Gama}(k\alpha, \lambda).$$

- ▶ A distribuição Erlang é um **caso particular** da Gama quando r é um número natural, $r \in \{1, 2, \dots\}$.

Distribuição Gama: Relação com outras Distribuições

Casos particulares:

- $X \sim \chi_n^2 \Leftrightarrow X \sim G\left(\alpha = \frac{n}{2}; \lambda = \frac{1}{2}\right)$;
- $X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X \sim G(\alpha = 1; \lambda)$.

ProbabilidadesEstatistica 2019 (uevora.pt)

Distribuição Gama

α Parâmetro de forma
 λ Parâmetro de taxa

O aspeto da distribuição depende do valor dos parâmetros (Figura 5.13).

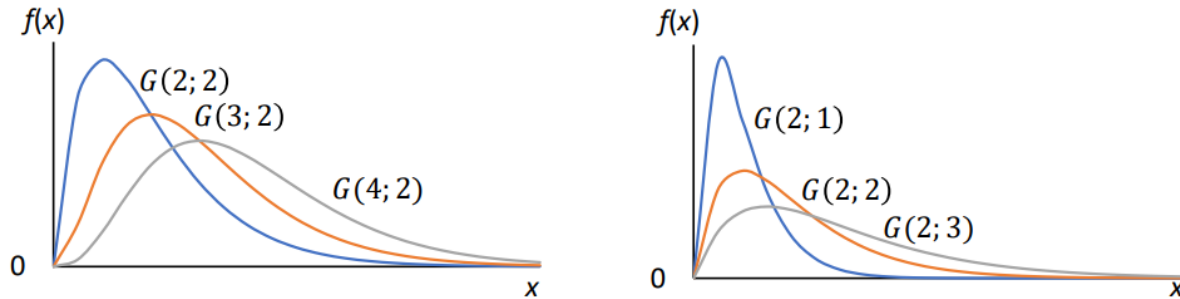


Figura 5.13: Função densidade de probabilidade da distribuição Gama para diferentes valores de α e λ .

Se $X \sim G(\alpha; \lambda)$, então $\mu_X = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Teorema da aditividade: Se $X_i, i = 1, 2, \dots, K$, são v. a. independentes e $X_i \sim G(\alpha_i; \lambda)$, então

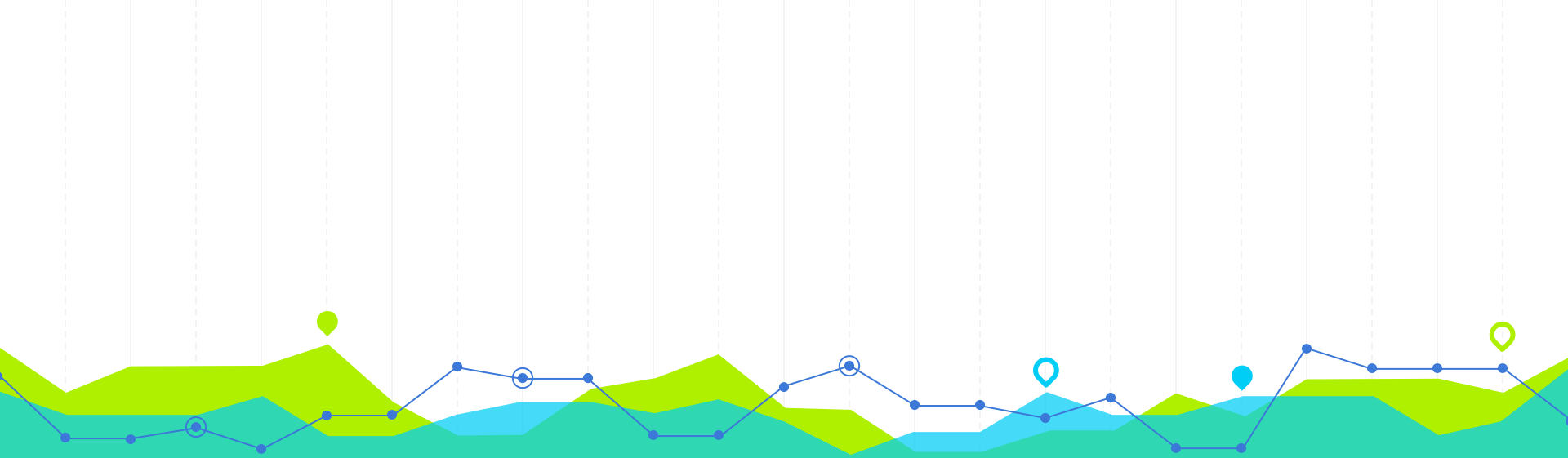
$$\sum_{i=1}^K X_i \sim G(\alpha; \lambda), \text{ com } \alpha = \sum_{i=1}^K \alpha_i.$$

Distribuição Gama

A distribuição **Gama** pode ser como uma generalização da distribuição Exponencial para descrever a v.a. X que representa **o tempo de espera até à ocorrência do n -ésimo sucesso**. A variável X resulta da soma dos

tempos de espera entre as várias ocorrências sucessivas (X_i) até à ocorrência pretendida. Deste modo, pelo teorema da aditividade como $X_i, i = 1, \dots, n$, são v. a. independentes e $X_i \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X_i \sim G(1; \lambda)$, então

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim G(n; \lambda).$$



Distribuição t-Student

Variáveis Aleatórias Contínuas

4

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student é uma distribuição de probabilidade contínua.
- A distribuição t-Student geralmente surge quando temos uma população com variância desconhecida (e tem de ser estimada a partir dos dados recolhidos) e uma amostra de dimensão pequena ($n < 30$).
- A distribuição t-Student é dada pelo quociente entre uma normal reduzida e a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida pelo respectivo número de graus de liberdade.

I.e., se $Z \sim N(0; 1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_{(n)}$$

- Se X tem distribuição t-Student com n graus de liberdade, escreve-se:

$$X \sim t_{(n)}$$

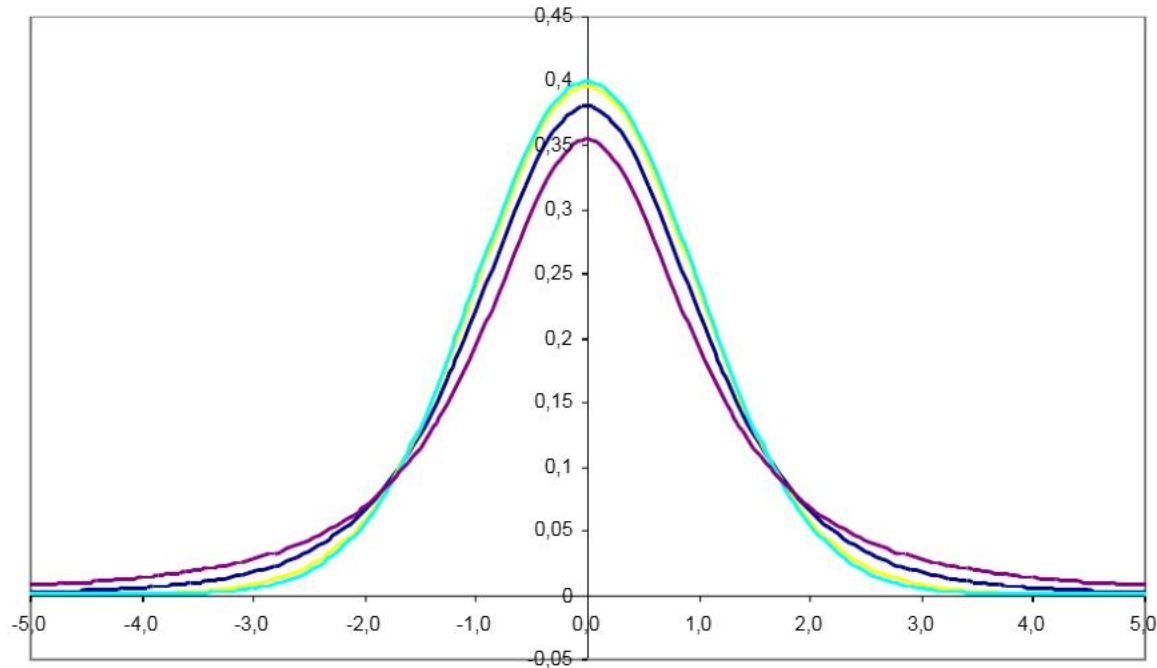
Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student tem um parâmetro: n – o nº de graus de liberdade.
- É uma distribuição simétrica.

- $E[X] = 0$
- $\text{Var}[X] = n/(n-2)$, se $n > 2$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student

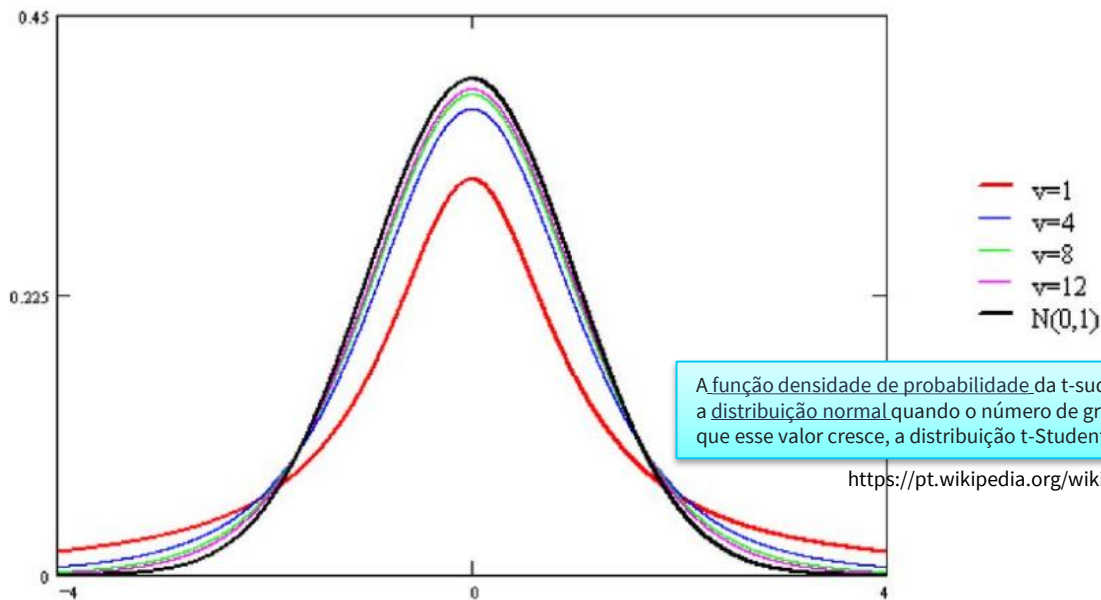


Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

T-Student

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- ... A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade (n-1), que denotamos por ν

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$



A função densidade de probabilidade da t-Student detém caudas mais pesadas que a distribuição normal quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student varia de acordo com os graus de liberdade. Isto significa que a sua curva depende da dimensão da amostra, n .
- Está tabelada para algumas probabilidades e $n \leq 30$, $n = 40$, $n = 60$, $n = 120$ e $n = \infty$.
- Quando $n > 30$, pode usar-se a aproximação à distribuição normal. Em tais casos, $\mu = 0$ e $\text{Var} = n/(n-2)$.
- À medida que n aumenta, a distribuição tende para a distribuição normal. Para n grande, a distribuição t-Student tende a ser muito semelhante à distribuição normal.

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student: Resumo...

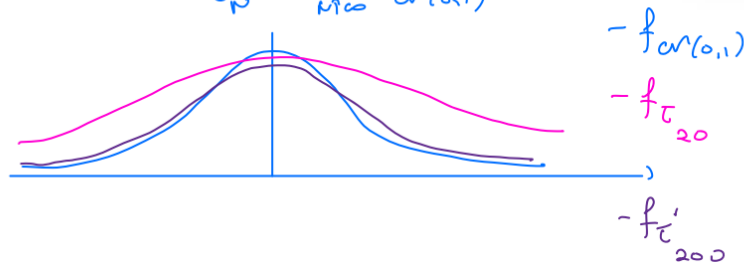
propriedades básicas da distribuição

i) a sua função densidade de probabilidade é simétrica em torno de zero e tem uma representação gráfica muito parecida com a de $N(0,1)$!



ii) Quando n é "bastante grande",

$$f_{t_n}(x) \rightarrow f_{N(0,1)}(x)$$



t_N é-se "distribuição t de student com N graus de liberdade"

Distribuição t-Student

Formulário

• t-“STUDENT”

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}} \sim t(n) \text{ com } U \sim N(0,1) \text{ e } V \sim \chi^2(n) \text{ independentes}$$

$$E(T) = 0; \text{Var}(T) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2); \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = \frac{3(n-2)}{n-4} \quad (n > 4)$$

Propriedade: • Sendo $T \sim t(n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_T(t | n) = \Phi(t)$



Distribuição do t-Student: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

5

Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

- a) Calcule $P[X \leq 2,7]$;
- b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;
- c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;
- d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.



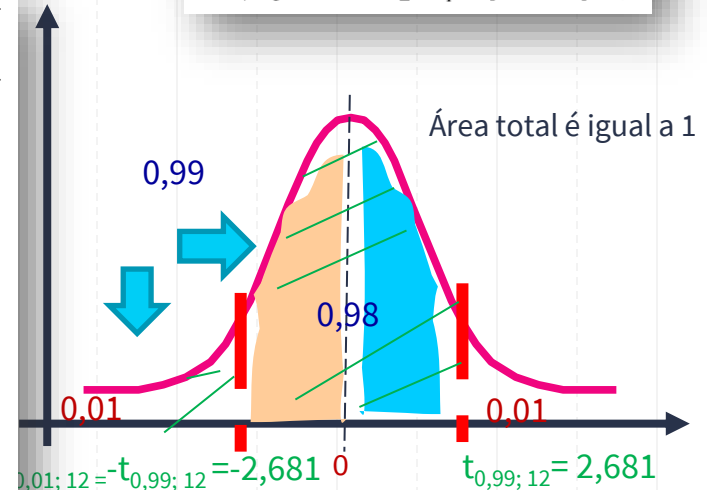
Exercício a)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n								
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2,681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

Suponha que $X \sim t_{(12)}$:

- Calcule $P[X \leq 2,7]$;
- Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;
- Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;
- Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.



$$P(X \leq 2,7) \sim P(X \leq 2,681) = 1 - P(X > 2,681) = 1 - 0,01 = 0,99$$

Exercício b)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

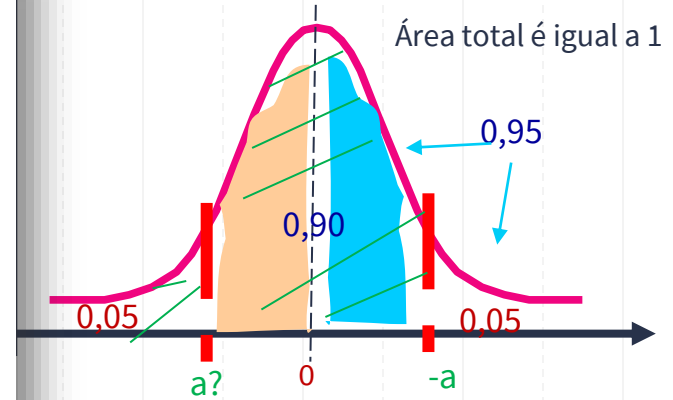


ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n								
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



Suponha que $X \sim t_{(12)}$:

- Calcule $P[X \leq 2,7]$;
- Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;
- Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;
- Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.



$$P(X \geq a) = 0,95 \Leftrightarrow P(X > -a) = 0,05 \Leftrightarrow -a = 1,782 \Leftrightarrow a = -1,782$$

Exercício c)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

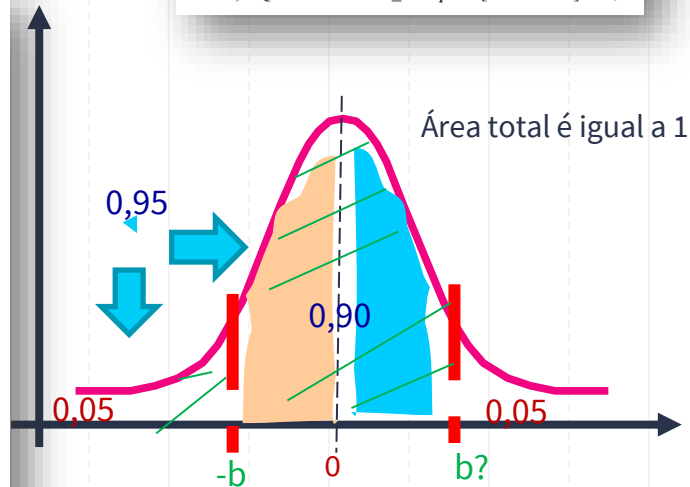


ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n								
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

$$P(X > b) = 0,05 \Leftrightarrow b = 1,782$$

Suponha que $X \sim t_{(12)}$:

- Calcule $P[X \leq 2,7]$;
- Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;
- Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;
- Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.



Exercício d)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

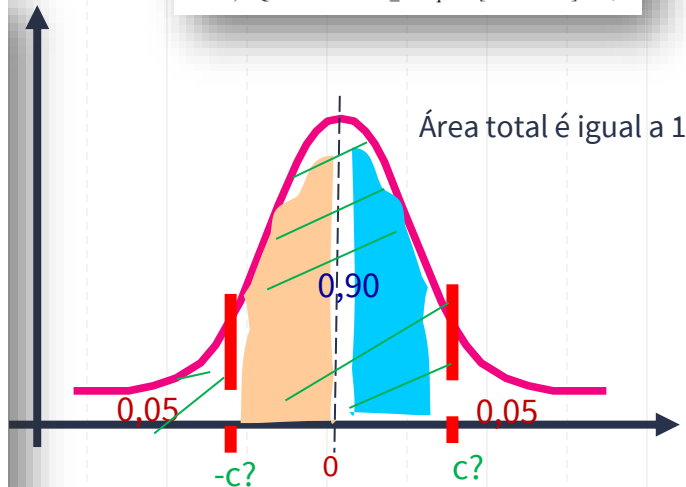


ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

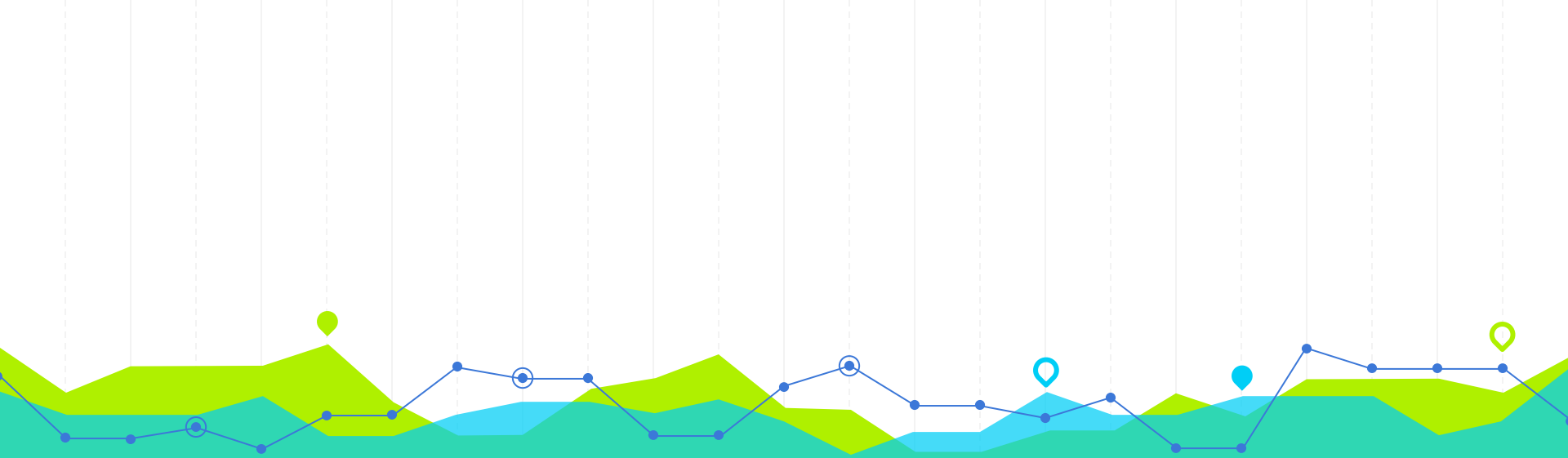


Suponha que $X \sim t_{(12)}$:

- Calcule $P[X \leq 2,7]$;
- Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;
- Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;
- Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.



$$P(-c < X < c) = 0,90 \Leftrightarrow P(X < c) - P(X < -c) = F(c) - F(-c) = F(c) - (1 - F(c)) \\ = 2 \times F(c) - 1 = 0,90 \Leftrightarrow F(c) = 0,95 \Leftrightarrow c = F(0,95)^{-1} = 1,782$$



Distribuição F-Snedcor

Variáveis Aleatórias Contínuas

5

Distribuição F-Snedcor

- A distribuição F-Snedcor é uma distribuição de probabilidade contínua.
- A distribuição F-Snedcor é dada pelo quociente entre duas variáveis aleatórias com distribuição do qui-quadrado, cada uma dividida pelos respectivos graus de liberdade.

I.e., se $X \sim \chi^2_{(m)}$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$F \equiv \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{(m,n)}$$

- Se X tem uma distribuição F-Snedcor com m e n graus de liberdade, escreve-se:

$$X \sim F_{(m,n)}$$

- A distribuição F-Snedcor tem dois parâmetros: m e n – i.e., o nº de graus de liberdade do numerador e do denominador ($m, n \in \mathbb{N}$).

Distribuição F-Snedcor

- É uma distribuição positiva e não simétrica.
- $E[X] = n/(n-2)$, quando $n > 2$

$$VAR[X] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \text{ quando } n > 4$$

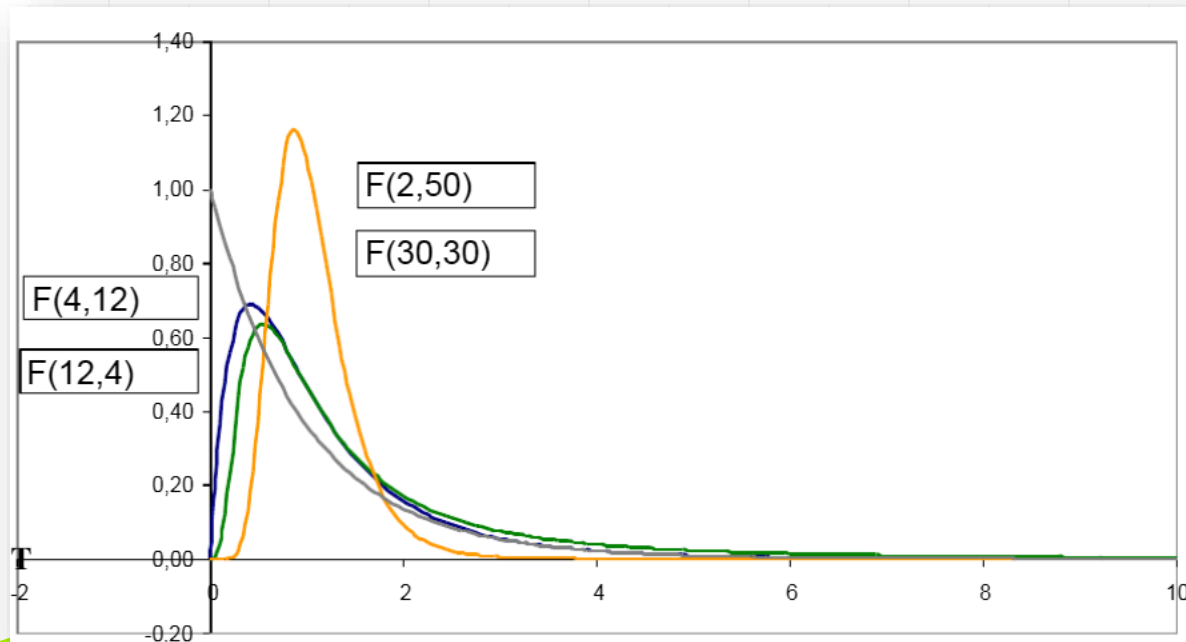
- Se $X \sim F_{(m,n)}$, então:

$$\frac{1}{X} \sim F_{(n,m)}$$

- Se $X \sim t_{(n)}$, então $X^2 \sim F_{(1,n)}$
- A distribuição F-Snedcor está tabelada para algumas probabilidades e alguns m e n

($m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 60, 120, \infty$)

Distribuição F-Snedcor



Distribuição F-Snedcor

Formulário

- **F-SNEDCOR**

$$F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m, n) \text{ com } U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n) \text{ (independentes)}$$

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2); \quad \text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4)$$

Propriedades:

- $X \sim F(m, n) \Rightarrow \frac{1}{X} \sim F(n, m)$
- $T \sim t(n) \Rightarrow T^2 \sim F(1, n)$



Distribuição do F-Snedcor: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

6

Suponha que $X \sim F_{(10; 5)}$.

- a) Calcule o valor de a tal que $P[X > a] = 0,025$;
- b) Calcule o valor de b tal que $P[X < b] = 0,05$;
- c) Calcule os valores de c e d tal que $P[c < X < d] = 0,9$.

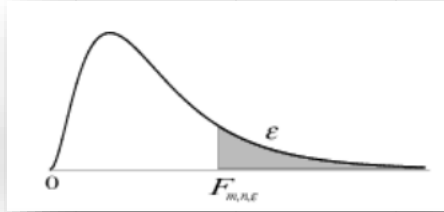


Exercício a)

Suponha que $X \sim F_{(10; 5)}$.

- Calcule o valor de a tal que $P[X > a] = 0,025$;
- Calcule o valor de b tal que $P[X < b] = 0,05$;
- Calcule os valores de c e d tal que $P[c < X < d] = 0,9$.

$$F_{m,n,\epsilon} : P(X > F_{m,n,\epsilon}) = \epsilon$$



		m - graus de liberdade do numerador																			
		ϵ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
liberdade do denominador	1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
		.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.32
		.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.87	993.08	997.27	1001.40	1005.60	1009.79	1014.04	1018.26
		.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.97	6208.66	6234.27	6260.35	6286.43	6312.97	6339.51	6365.59
	2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
		.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
		.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
		.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
	3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
		.050	18.51	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
		.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
		.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
	4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.80	3.78	3.76	3.74	3.72
		.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.81	5.78	5.75	5.72	5.70	5.68	5.66
		.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.57	8.50	8.44	8.38	8.32	8.26	8.20
		.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.85	13.68	13.50	13.30	13.10	12.90
	5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
		.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
		.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
		.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02

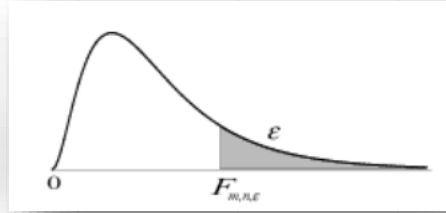
$P(X > a) = 0,025 \Rightarrow a = 6,62$

Exercício b)

Suponha que $X \sim F_{(10;5)}$.

- Calcule o valor de a tal que $P[X > a] = 0,025$;
- Calcule o valor de b tal que $P[X < b] = 0,05$;
- Calcule os valores de c e d tal que $P[c < X < d] = 0,9$.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



		m – graus de liberdade do numerador																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
ε	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
10	.100	2.33	2.06	1.96	1.90	1.86	1.83	1.81	1.79	1.78	1.77	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.68
	.050	3.33	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	.025	4.54	3.78	3.48	3.36	3.27	3.21	3.16	3.12	3.09	3.07	3.04	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	2.88	2.86
	.010	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.72	3.61	3.53	3.47	3.43	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.18
5	.100	1.75	1.58	1.52	1.48	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30
	.050	2.57	2.28	2.18	2.13	2.09	2.06	2.04	2.02	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91
	.025	3.58	3.11	2.91	2.84	2.80	2.77	2.75	2.73	2.72	2.71	2.70	2.69	2.68	2.67	2.66	2.65	2.64	2.63	2.62
	.010	5.41	4.28	3.66	3.36	3.27	3.21	3.16	3.12	3.09	3.07	3.04	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	2.88	2.86
1	.100	1.00	0.98	0.97	0.96	0.95	0.95	0.94	0.94	0.93	0.93	0.92	0.92	0.91	0.91	0.90	0.90	0.89	0.89	0.88
	.050	1.24	1.20	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.14	1.13	1.12	1.12	1.11	1.10	1.10	1.09	1.09	1.08	1.08	1.07
	.025	1.50	1.44	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.33	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29
	.010	1.83	1.74	1.70	1.68	1.67	1.66	1.65	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,05 com 10 e 5 graus de liberdade

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,95 com 5 e 10 graus de liberdade. No caso da tabela é o valor d tal que $P(F > d) = 0,05$

$$P(X < b) = 0,05 \Leftrightarrow 1 - P(X > b) = 0,05 \Leftrightarrow P(X > b) = 0,95$$

$$\Rightarrow b = F_{0,05; 10,5} = 1 / F_{0,95; 5,10} = 1 / 3,33 = 0,30$$

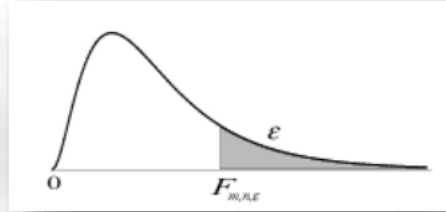
$$F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1; 1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercício c)

Suponha que $X \sim F_{(10; 5)}$.

- Calcule o valor de \underline{a} tal que $P[X > a] = 0,025$;
- Calcule o valor de \underline{b} tal que $P[X < b] = 0,05$;
- Calcule os valores de \underline{c} e \underline{d} tal que $P[c < X < d] = 0,9$.

$$F_{m,n,\epsilon} : P(X > F_{m,n,\epsilon}) = \epsilon$$



		m - graus de liberdade do numerador																			
		ϵ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	∞						
liberdade do denominador	1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.2		63.33					
		.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.9		254.32					
		.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.8		1018.26					
		.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.9		6365.59					
	2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
		.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49
		.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.35	39.37	39.38	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.50
		.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.35	99.37	99.38	99.40	99.41	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
	3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.29	5.28	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27
		.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.95	8.92	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91	8.91
		.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.80	14.78	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77	14.77
		.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	28.15	28.13	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12	28.12
	4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.03	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
		.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.22	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21	6.21
		.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.30	9.28	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27	9.27
		.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.45	15.43	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42	15.42
	5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
		.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
		.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
		.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,05 com 10 e 5 graus de liberdade

$P(c < X < d) = 0,9$
 $P(X > d) = 0,05 \Rightarrow d = 4,74$
 $P(X > c) = 0,95 \Rightarrow c = F_{0,95; 10,5} = 1 / F_{0,05; 5,10} = 1 / 3,33 = 0,30$
 (ver slide a seguir)

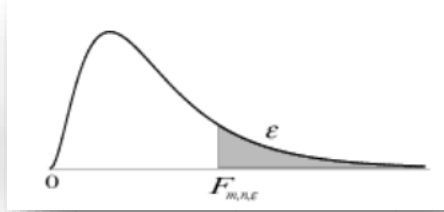
$$F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1; 1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercício c)

Suponha que $X \sim F_{(10;5)}$.

- Calcule o valor de a tal que $P[X > a] = 0,025$;
- Calcule o valor de b tal que $P[X < b] = 0,05$;
- Calcule os valores de c e d tal que $P[c < X < d] = 0,9$.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



		m – graus de liberdade do numerador																			
		ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06	
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91	
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97	
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40	
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.62	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.70	3.60	
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.49	2.40	2.34	2.29	2.25	2.22	2.20	2.16	2.12	2.07	2.05	2.03	2.00	1.97	1.90		
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.10	2.99	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.55	2.51	2.47	2.43	2.39	2.32	2.26	
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.88	3.72	3.62	3.55	3.49	3.43	3.33	3.23	3.13	3.07	3.02	2.96	2.90	2.84	2.78	
	.010	9.33	6.93	5.95	5.40	5.05	4.80	4.64	4.54	4.47	4.40	4.26	4.11	3.96	3.88	3.80	3.72	3.64	3.56	3.48	3.36

$$P(c < X < d) = 0,9$$

$$P(X > c) = 0,95 \Rightarrow c = F_{0,95; 10,5} = 1 / F_{0,95; 5,10} = 1/3,33 = 0,30$$

$$F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1; 1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Obrigada!

Questões?

[Distribuições por Amostragem.pdf](#)