ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística II

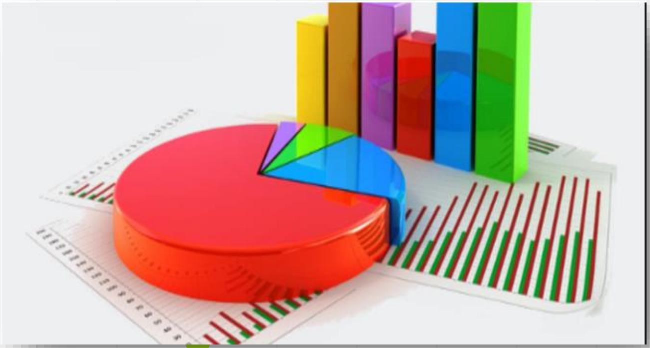
Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

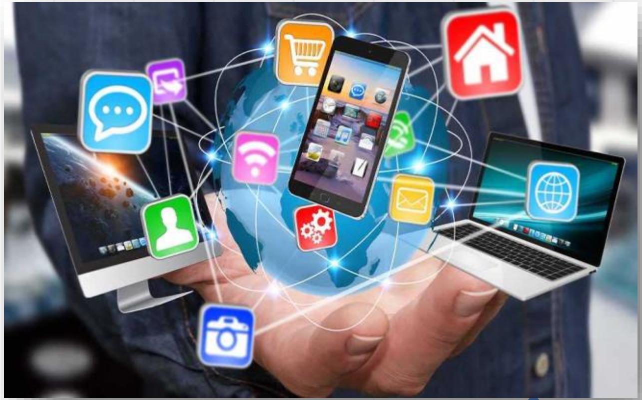
2023/2024

Aula Teórico-Prática N.º 12 (Semana 7)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

Propriedades dos Estimadores

1

Estimador Centrado, Consistente e Eficiente

Principais Propriedades dos Estimadores

Principais propriedades desejáveis nos estimadores:

- *Não enviesamento* – em termos médios, o estimador atinge o valor real do parâmetro;
- *Eficiência* – o estimador é mais eficiente quanto menor for a sua variância;
-
- *Consistência* – para n grande, o estimador deve ser aproximadamente igual ao parâmetro.

Estimador Centrado ou não Enviesado

Definição: Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **não enviesado** ou **centrado** do parâmetro θ se:

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O **enviesamento** (Env) de $\hat{\theta}$ é dado por:

$$Env(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

Viés ou Bias

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Estimador Eficiente

Definição: Sejam $\boxed{\hat{\theta} \text{ e } \tilde{\theta} \text{ dois estimadores centrados}}$ do parâmetro θ, baseados no mesmo número de observações. Então:

- $\hat{\theta}$ diz-se **mais eficiente** do que $\tilde{\theta}$ se: $Var(\hat{\theta}) < Var(\tilde{\theta})$
- A **eficiência relativa** do primeiro estimador relativamente ao segundo é dada por:

$$\text{Eficiência relativa} = \frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})}.$$

$\hat{\theta}$ é um estimador eficiente de θ se ele satisfizer as seguintes condições: (i) $\hat{\theta}$ é não viesado; (ii) $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$, onde $\tilde{\theta}$ é qualquer outro estimador não viesado de θ.

Para comparar dois estimadores enviesados utiliza-se o critério do erro quadrático médio.

Microsoft Word - PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES.docx (usp.br)

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O **erro quadrático médio** (EQM) de $\hat{\theta}$ é dado por:

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left(Env(\hat{\theta})\right)^2.$$

Observação: Se $\hat{\theta}$ um estimador centrado para o parâmetro θ, então $Env(\hat{\theta}) = 0$ e, por conseguinte, $EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

estimador viesado jamais será eficiente, por menor que seja o viés.

Microsoft Word - PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES.docx (usp.br)

Definição: Sejam $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ dois estimadores. Diz-se que $\hat{\theta}$ é "melhor" que $\tilde{\theta}$ se:

$$EQM(\hat{\theta}) < EQM(\tilde{\theta}).$$

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Erro Quadrático Médio (EQM)

3. Erro quadrático médio

Chama-se erro quadrático médio do estimador $\mathbf{\Theta^*}$ a $\boldsymbol{EQM\,(\Theta^*) = E\left[(\Theta^* - \theta)^2\right]}$.

Esta propriedade é um dos critérios mais usados para comparar estimadores.

É muito fácil mostrar que

$$EQM\,(\Theta^*) = Var\,[\Theta^*] + [b_\theta(\Theta^*)]^2$$

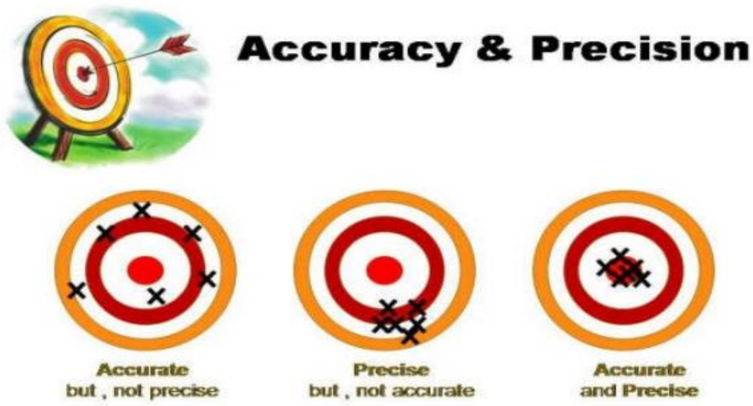
Se Θ^* é um estimador centrado de um parâmetro então o erro quadrático médio $\equiv$ variância, i.e.

$$E\left[(\Theta^* - \theta)^2\right] = Var\,(\Theta^*)$$

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Exatidão vs Precisão

O termo exactidão (accuracy) refere-se à proximidade de uma medição ou estimativa ao verdadeiro valor.
O termo precisão ou variância (precision) refere-se ao "grau de concordância numa sucessão de medições".



moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Eficiência Relativa vs Eficiência Absoluta

Observações:

- A eficiência exige a existência de momentos de segunda ordem dos estimadores.
- A definição de eficiência apresenta dois conceitos diferentes:
  - O primeiro estabelece uma relação entre dois estimadores centrados para θ, sendo portanto uma eficiência ***relativa***.
  - O segundo é um conceito de eficiência ***absoluta*** na classe dos estimadores centrados para θ.
- Para obter estimadores mais eficientes recorre-se à **desigualdade de Fréchet-Cramér-Rao**.

Teorema 7.1 – Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra casual de população com função densidade (função probabilidade) $f(x \mid \theta)$, *satisfazendo certas condições de regularidade*, e seja $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ um estimador centrado de θ. Então,

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{1}{n\Im(\theta)},$$

onde,

$$\Im(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X \mid \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = -E\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln f(X \mid \theta)}{\partial \theta^2}\right]\right\} \text{ (quantidade de informação de Fisher)}$$

Slides Andrade e Silva

Estimador Centrado de Variância Mínima

Conhecido o limite inferior dado pela desigualdade de Fréchet-Cramér-Rao, compara-se a variância do estimador centrado em análise com este limite:

- caso sejam iguais → não existe nenhum outro estimador centrado de variância inferior sendo o estimador em análise o mais eficiente;
- caso contrário → o quociente, $\left[n\Im(\theta)\right]^{-1} / \mathrm{Var}(T)$, fornece uma indicação sobre a eficiência relativa do estimador T face ao hipotético estimador de variância igual ao limite inferior da desigualdade.

Slides Andrade e Silva

Estimador Convergente ou Consistente

Definição: Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **consistente** quando para qualquer valor positivo δ, se verifica a condição:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|\hat{\theta}-\theta| < \delta\right] = 1.$$

Teorema: As condições:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\hat{\theta}) = \theta;$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} Var(\hat{\theta}) = 0.$

são suficientes para que $\hat{\theta}$ seja estimador **consistente**.

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Estimador dos Momentos vs EMV

Propriedades dos estimadores obtidos pelo método dos momentos

- Em condições bastante gerais, são consistentes e possuem distribuição aproximadamente normal quando a dimensão da amostra é muito grande (distribuição assintótica).

Propriedades dos estimadores obtidos pelo método da máxima verosimilhança

- Os estimadores de máxima verosimilhança não são necessariamente centrados.
- Em condições muito gerais eles são consistentes.
- Demonstra-se que, se existir estimador mais eficiente (na óptica do teorema de Fréchet-Cramér-Rao) ele é solução única da equação $dL/d\theta = 0$ e portanto estimador de máxima verosimilhança.
- Verificadas certas condições de regularidade, os estimadores da máxima verosimilhança seguem assintoticamente uma distribuição normal. Caso haja apenas 1 parâmetro desconhecido, tem-se

$$\sqrt{n\Im(\theta)}(\hat{\theta}-\theta) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Slides Andrade e Silva

Propriedades dos Estimadores: Exercícios

2

Estimador Centrado, Eficiente e Convergente

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

1. Suponha que uma variável aleatória X representa o número de avarias de um dispositivo durante um período de tempo e que obedece a uma lei de Poisson de parâmetro λ desconhecido. Para este parâmetro foram sugeridos dois estimadores:

$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda} = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

a) Compare-os quanto ao enviesamento.

b) Deduza a variância para cada um deles.

c) Qual dos dois estimadores é mais eficiente? Justifique a sua escolha.

d) Estude os dois estimadores quanto à consistência.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 1 a): Estimadores Centrados

Se $X \sim P(\lambda)$, então $E(X) = Var(X) = \lambda$.

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ é uma a. a. duma dada população $X \sim P(\lambda)$, então $X_i \sim P(\lambda), i = 1, \dots, n$.

a) $$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n))$$
$$= \frac{1}{n}(\lambda + \lambda + \cdots + \lambda) = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda.$$

$$E(\tilde{\lambda}) = E\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_n)) = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda) = \lambda.$$

Portanto, ambos os estimadores são centrados.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

VALOR ESPERADO, MOMENTOS E PARÂMETROS

Formulário

$$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2;$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y); \qquad \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ e $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ com a, b constantes

Exercício 1 b): Variâncias dos Estimadores

$$b)\ Var(\hat{\lambda}) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \underset{\substack{X_i \\ indep.}}{=} \frac{1}{n^2}(Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n])$$

$$= \frac{1}{n^2}(\lambda + \lambda + \cdots + \lambda) = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

$$Var(\tilde{\lambda}) = Var\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) \underset{\substack{X_i \\ indep.}}{=} \frac{1}{2^2}(Var(X_1) + Var(X_n)) = \frac{1}{4}(\lambda + \lambda) = \frac{\lambda}{2}.$$

[ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)]()

Exercício 1 c): Eficiência

c) Se $n = 1$, $Var(\hat{\lambda}) > Var(\tilde{\lambda})$ $\rightarrow$ $\tilde{\lambda}$ é mais eficiente do que $\hat{\lambda}$;

Se $n = 2$, $Var(\hat{\lambda}) = Var(\tilde{\lambda})$ $\rightarrow$ $\hat{\lambda}$ é tão eficiente como $\tilde{\lambda}$;

Se $n > 2$, $Var(\hat{\lambda}) < Var(\tilde{\lambda})$ $\rightarrow$ $\hat{\lambda}$ é mais eficiente do que $\tilde{\lambda}$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 1 d): Consistência

d) $\hat{\lambda}$ é um estimador consistente, pois $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ e $Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n} \to 0$, quando $n \to \infty$.

$\tilde{\lambda}$ não é um estimador consistente: $E(\tilde{\lambda}) = \lambda$ mas $Var(\tilde{\lambda}) = \frac{\lambda}{2}$, seja qual for o valor de n.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 6.4 [Estimadores, erro quadrático médio, eficiência relativa.]

Se (X_1, X_2, X_3) constitui uma amostra aleatória de dimensão 3 extraída de uma população normal com valor esperado μ e variância σ^2, qual a eficiência de $\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ relativamente a $\bar{X}$?

Exercício 6.4: Eficiência

- **V.a. de interesse**

  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

- **Amostra aleatória**

  $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ é a.a. de dimensão 3 proveniente da população X, donde $X_i \sim_{i.i.d.} X$, $i = 1, 2, 3$.

- **Parâmetro desconhecido a estimar**

  $\mu = E(X)$

- **Estimador de $\mu = E(X)$**

  $\bar{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$ [média da a.a. $\underline{X}$]

- **Erro quadrático médio de $\bar{X}$**

$$
\begin{aligned}
EQM_\mu(\bar{X}) &= V(\bar{X}) + \left[bias_\mu(\bar{X})\right]^2 \\
&= V(\bar{X}) + \left[E(\bar{X}) - \mu\right]^2 \\
&\overset{X_i \sim_{i.i.d.} X}{=} \frac{V(X)}{n} + [E(X) - E(X)]^2 \\
&= \frac{V(X)}{n} \\
&= \frac{\sigma^2}{3}
\end{aligned}
$$

Slides Professora Sofia Naique

Exercício 6.4: Eficiência

- **Outro estimador de** $\mu = E(X)$

$T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$

- **Erro quadrático médio de** T

$$
\begin{aligned}
EQM_\mu(T) &= V(T) + \left[bias_\mu(T)\right]^2 \\
&= V(T) + \left[E(T) - \mu\right]^2 \\
&= V\left[\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right] + \left\{E\left[\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right] - E(X)\right\}^2 \\
&\overset{X_i\, indep}{=} \frac{1}{4^2}\left[V(X_1) + 4V(X_2) + V(X_3)\right] + \left\{\frac{1}{4}\left[E(X_1) + 2E(X_2) + E(X_3)\right] - E(X)\right\}^2 \\
&\overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{4^2}(1+4+1)\,V(X) + \left[\frac{1}{4}(1+2+1)\,E(X) - E(X)\right]^2 \\
&= \frac{3}{8}V(X) \\
&= \frac{3\sigma^2}{8}
\end{aligned}
$$

Exercício 6.4: Eficiência

- **Eficiência do estimador** $T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ **relativamente a** $\bar{X}$

$$\begin{aligned} e_\mu(T, \bar{X}) &= \frac{EQM_\mu(\bar{X})}{EQM_\mu(T)} \\ &= \frac{\frac{\sigma^2}{3}}{\frac{3\sigma^2}{8}} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

- **Comentário**

Tendo em conta que

$$e_\mu(T, \bar{X}) = \frac{8}{9} < 1,$$

i.e.,

$$EQM_\mu(\bar{X}) < EQM_\mu(T),$$

pode afirmar-se que $T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ é um estimador menos eficiente que $\bar{X}$ no que respeita à estimação de $\mu = E(X)$.

Slides Professora Sofia Naique

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

1ª) Sendo $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma $U(0, \theta)$.

a) Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ e o seu EQM.

Exercício 1 a): Método dos Momentos e EQM

- **UNIFORME (CONTÍNUA)** $X \sim U(\alpha, \beta)$, $(\alpha < \beta)$

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \alpha < x < \beta \quad ; \quad E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \; ; \; \mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \; ;$$

Formulário

Dado que $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$ e o primeiro momento amostral é $m_1 = \bar{X}$, temos que pelo método dos momentos,

$$\mathbb{E}(X) = m_1 \Rightarrow \frac{\hat{\theta}_{mm}}{2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{mm} = 2\bar{X}.$$

Sabendo que o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro θ é definido como

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

e dado que $Var(X) = \frac{\theta^2}{12}$, temos que para $\hat{\theta}_{mm} = 2\bar{X}$ o EQM é dado por,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2\bar{X}) &= \frac{2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)}{n} = \frac{2n\frac{\theta}{2}}{n} = \theta, \\
\text{Viés}(2\bar{X}) &= \mathbb{E}(2\bar{X}) - \theta = \theta - \theta = 0, \\
Var(2\bar{X}) &= \frac{4\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2} = \frac{4n\frac{\theta^2}{12}}{n^2} = \frac{\theta^2}{3n}, \\
EQM(2\bar{X}) &= Var(2\bar{X}) + (\text{Viés}(2\bar{X}))^2 = Var(2\bar{X}) = \frac{\theta^2}{3n}.
\end{aligned}$$

Exercícios sobre EQM,ENVUM,IF e LICR.pdf

Propriedades dos Estimadores: Exercícios

3

Murteira at al (2015)

2. Pretende-se ter uma ideia da densidade do tráfego em certo local, entre as 8 e as 9 horas. Sabe-se que o número de veículos que aí passam durante esse período segue um processo de Poisson. Fizeram-se as seguintes 9 observações casuais:

$$(95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70).$$

   a) Obtenha o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para o número médio de veículos que passam naquele local.
   b) Mostre que se trata de um estimador consistente e que é o mais eficiente.
   c) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de decorrerem pelo menos dois minutos sem passar qualquer veículo.
   d) Mostre que $\Sigma_{i=1}^{n} X_i$ é estatística suficiente para a média da população.

Exercício 2 a)

X - v.a. nº veículos por hora entre as 8h e as 9h (1 hora)

$X \sim Po(\lambda)$ → Amostra $(n=9)$: 95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70

Exercício 2 a)

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots \quad (\lambda>0), \quad E(X)=\lambda, \quad Var(X)=\lambda$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\,\lambda^{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}^{n\bar{x}}}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)} \quad (\lambda>0)$$

$$\ell(\lambda) = \ln\left[L(\lambda)\right] = \ln\left(\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)}\right) = -n\lambda + n\bar{x}\ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!) \quad (\lambda>0)$$

$$\frac{d\,\ell(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow -n + \frac{n\bar{x}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{n\bar{x}}{\lambda} = n \Rightarrow n\lambda = n\bar{x} \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$$

$\forall \lambda > 0$

$$\frac{d^2\,\ell(\hat{\lambda})}{d\lambda^2} = -\frac{n\bar{x}}{\hat{\lambda}^2} < 0, \text{ pois } \bar{x} \neq 0.$$

Logo, o estimador MV é: $\hat{\lambda} = \bar{X}$

Estimativa MV: $\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{95+100+80+70+110+98+97+90+70}{9} = 90$

Exercício 2 b)

Consistência: Verificar $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\hat{\lambda})$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} Var(\hat{\lambda})$

- $E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = E(X) = \lambda$ → Estimador centrado
- $Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{X}) = \dfrac{Var(X)}{n} = \dfrac{\lambda}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda = \lambda \\[2ex] \lim\limits_{n\to+\infty} Var(\hat{\lambda}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda/n = 0 \end{array}\right\} \bar{X} \text{ é estimador consistente de } \lambda$$

Exercício 2 b)

Curiosidade

Eficiência absoluta

o limite mínimo para a variância de qq estimador centrado de λ é dado por

Pelo teorema F-C-R, qualquer estimador centrado de λ verifica

$$Var(T) \geq \frac{1}{n\,\mathcal{I}(\lambda)} \longrightarrow \text{limite inferior da variância do estimador}$$

Sabendo que no caso da distribuição de Poisson se tem uma quantidade de informação de Fisher de $\mathcal{I}(\lambda) = 1/\lambda$, obtém-se o limite inferior

$$\frac{1}{n\,\mathcal{I}(\lambda)} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{n/\lambda} = \frac{\lambda}{n}$$

Ora, porque $Var(\hat{\lambda}) = \lambda/n = \frac{1}{n\,\mathcal{I}(\lambda)}$, conclui-se que $\hat{\lambda} = \bar{X}$ é o estimador (centrado) mais eficiente de λ (de variância mínima).

Exercício 2 c)

Y - v.a. nº veículos em 2 minutos. Quer-se $\hat{P}(Y=0)$.

Como $X \sim Po(\hat{\lambda}=90)$ sendo o nº veículos em 60 minutos, então $Y \sim Po(\hat{\lambda}')$, onde $\hat{\lambda}'$ é tal que:

$\hat{\lambda} = 90$ ———— 60 min

$\hat{\lambda}' = \,?$ ———— 2 min

$$\Rightarrow \hat{\lambda}' = \frac{2 \times 90}{60} = 3$$

Assim, $Y \sim Po(3)$.

Então, recorrendo à propriedade da invariância dos estimadores MV, obtém-se:

$$\hat{P}(Y=0) = \frac{e^{-\hat{\lambda}'} \cdot \hat{\lambda}'^{\,0}}{0!} = e^{-3} \approx 0.0498$$

poissonpdf $(\overset{\lambda}{3}, \overset{y}{0})$

Obrigada!

Questões?