6 Integrais Múltiplos

Exercício 6.1. Calcule os seguintes integrais

$$a)\int_0^1\int_{-1}^1\int_1^2 x\,dxdydz \qquad b)\int_{-1}^1\int_0^1 ye^{xy}dxdy$$

$$c)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y-z}dxdydz \quad d)\int_0^5\int_0^{+\infty}(x^2e^{-2yx}+3ye^{-y^2})dydx$$

$$e)\int_1^2\int_1^2(1+x+\frac{y}{2})dxdy \qquad f)\int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos x\,dxdydz.$$

solução: a) 3 b) $e-\frac{1}{e}-2$ c) 1 d) $\frac{55}{4}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

Exercício 6.2. Calcule $\iint_A f(x,y)dxdy$, onde

$a) f(x,y)=\frac{2x}{y^6}, \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le y\le 3,\ 0\le x\le y^4\}$

$b) f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}, \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x\le 2,\ x\le y\le x^3\}$

$c) f(x,y)=x^2y^5, \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\}$

$d) f(x,y)=ye^x+x^2y, \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$

$e) f(x,y)=xe^{-xy}, \qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y<+\infty\right\}$

$f) f(x,y)=x^3+4y, \qquad A$ é a região limitada por $y=x^2$ e $y=2x$.

solução: a) $\frac{26}{3}$ b) $\frac{e^4}{2}-2e$ c) $\frac{2}{45}$ d) $\frac{e}{2}-\frac{23}{24}$ e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{32}{3}$

Exercício 6.3. Sendo $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\le 1-x,\ y\le 1+x,\ y\ge 0\}$, calcule
a) $\iint_A (x-1)y\,dxdy$ b) $\iint_A (y-2y^2)e^{xy}\,dxdy$ c) $\iint_A (x+y)\,dxdy.$

solução: a) $-\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{3}$

Exercício 6.4. Calcule

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)dxdy,\ com\ f(x,y)=\begin{cases} xy & x\ge 0\ e\ y\ge 0 \\ 1-x-y, & outros\ (x,y)\end{cases}.$$

solução: $\frac{17}{4}$

Exercício 6.5. Calcule com um integral duplo a área da figura plana que é imagem do conjunto A, sendo

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x^2 \leq y \leq 1\}$;
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq 1 \ \wedge \ x \leq 1\}$;
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$;
d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 2 \geq 0 \ \wedge \ x + y^2 \leq 0\}$;
e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \ \wedge \ y - x \geq 0 \ \wedge \ 2y - x \leq 3 \ \wedge \ x \geq 0\}$;
f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 1\}$;
g) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x \leq 2 \ \wedge \ x - y \geq 0\}$;
h) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \ \wedge \ x \leq \frac{y^2}{4} + 3\right\}$;

solução: a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{35}{48}$ f) $\frac{\pi}{2}$ g) $\frac{9}{2}$ h) 8

Exercício 6.6. Calcule $\displaystyle\int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dy dx$ (sugestão: comece por fazer o esboço gráfico da região integranda, invertendo depois a ordem de integração).

solução: $\frac{1 - \cos 64}{4}$

Exercício 6.7. Calcule $\displaystyle\iint_A g(x, y) dx dy$, sendo $A = [0, 2] \times [0, 4]$ e

$$g(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y \leq 2x \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

solução: $-\frac{4}{3}$