Estatística I

Licenciatura em Gestão e Licenciatura em Finanças

2.º Ano/2.º Semestre

2023/2024

Aula Teórica N.º 19 (Semana 11)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

1

Distribuição F-Snedcor

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição F-Snedcor

- A distribuição F-Snedecor é uma distribuição de probabilidade contínua.
- A distribuição F-Snedecor é dada pelo quociente entre duas variáveis aleatórias com distribuição do qui-quadrado, cada uma dividida pelos respectivos graus de liberdade.

  I.e., se $X \sim \chi^2_{(m)}$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$\boxed{F \equiv \frac{X/m}{Y/n} \cap F_{(m,n)}}$$

- Se X tem uma distribuição F-Snedecor com m e n graus de liberdade, escreve-se:

$$\boxed{X \sim F_{(m,\, n)}}$$

- A distribuição F-Snedecor tem dois parâmetros: m e n – *i.e.*, o nº de graus de liberdade do numerador e do denominador (m, n $\in$ N).

[Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu]

Distribuição F-Snedcor

- É uma distribuição positiva e não simétrica.
- $E[X] = n/(n-2)$, quando $n > 2$

$$VAR[X] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad , \text{ quando } n > 4$$

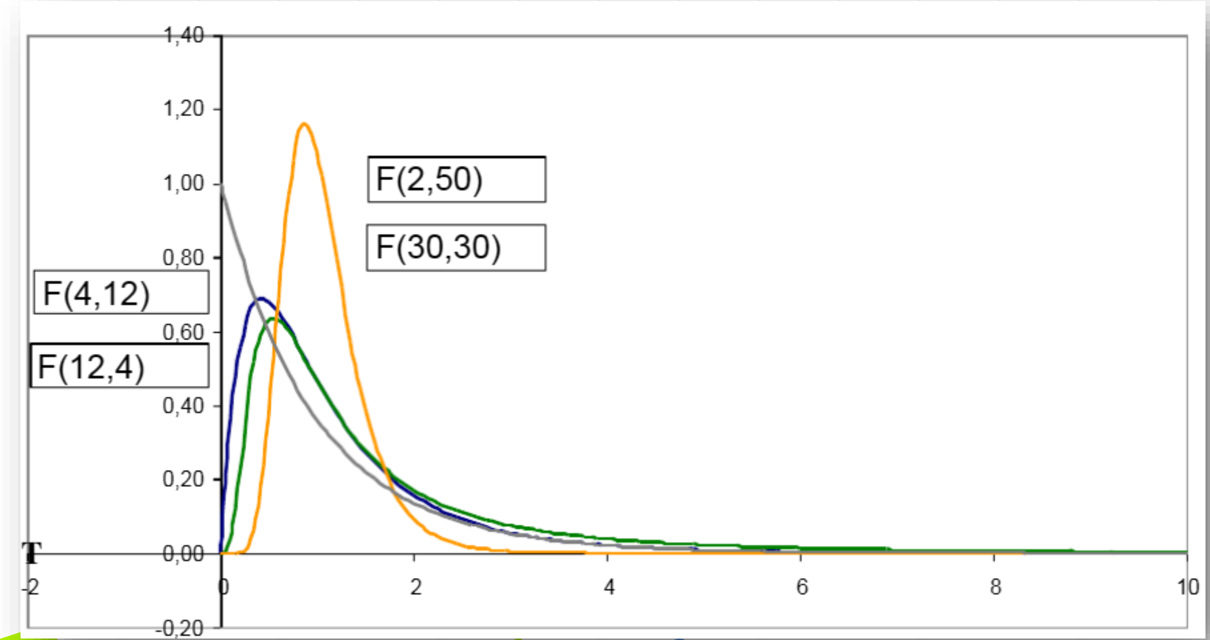
- Se $X \sim F_{(m, n)}$, então:

$$\frac{1}{X} \cap F_{(n,m)}$$

- Se $X \sim t_{(n)}$, então $X^2 \sim F_{(1, n)}$
- A distribuição F-Snedecor está tabelada para algumas probabilidade e alguns m e n

(m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 60, 120, ∞)

Distribuição F-Snedcor



Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição F-Snedcor

Formulário

- ***F*-SNEDCOR**

$$F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n) \text{ com } U \sim \chi^2(m),\ V \sim \chi^2(n) \text{ (independentes)}$$

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2);\ \text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4)$$

Propriedades:
- $X \sim F(m,n) \Rightarrow \frac{1}{X} \sim F(n,m)$
- $T \sim t_{(n)} \Rightarrow T^2 \sim F(1,n)$

Distribuição do F-Snedcor: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

Suponha que $X \sim F_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que $P[X > a] = 0{,}025$;

b) Calcule o valor de b tal que $P[X < b] = 0{,}05$;

c) Calcule os valores de c e d tal que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

Exercício a)

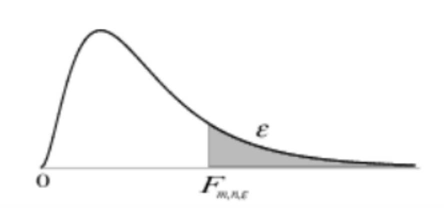
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



m - graus de libe… do numerador

n	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.87	993.08	997.27	1001.40	1005.60	1009.79	1014.04	1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.97	6208.66	6234.27	6260.35	6286.43	6312.97	6339.51	6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02

…de do denominador

P(X > a) = 0,025 => a = 6,62

Exercício b)

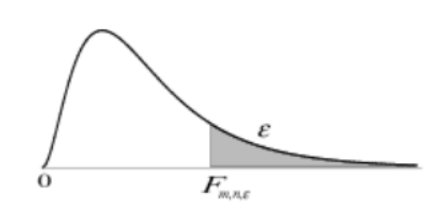
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
		m – graus de liberdade do numerador																		
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.36	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4.28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.67	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.48	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,05 com 10 e 5 graus de liberdade

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,95 com 5 e 10 graus de liberdade. No caso da tabela é o valor d tal que P(F > d) = 0,05

P(X < b) = 0,05 ⇔ 1-P(X > b) = 0,05 ⇔ P(X > b) = 0,95
=> b = F0,05; 10,5 = 1/ F0,95; 5,10 = 1/3,33 = 0,30

$$F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercício c)

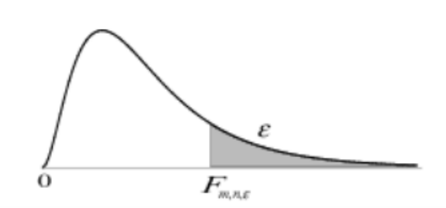
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



n	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15							∞
		m - graus de liberdade do numerador																		
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02

n - graus de liberdade do denominador

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,05 com 10 e 5 graus de liberdade

P(c < X < d) = 0,9
P(X > d) = 0,05 => d = 4,74
P(X > c) = 0,95 => c = F0,05; 10,5 = 1/ F0,95; 5,10 = 1/3,33 = 0,30
(ver slide a seguir)

$$F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercício c)

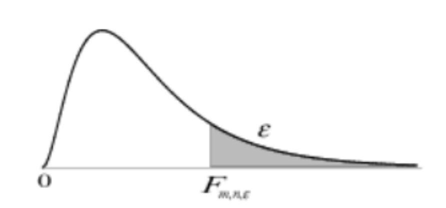
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



	ε	m – graus de liberdade do numerador																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
	.010	9.65	7.21	6.22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.60
12	.100	3.18	2.81	2.61																1.90
	.050	4.75	3.89	3.49																2.30
	.025	6.55	5.10	4.47																2.72
	.010	9.33	6.93	5.95																3.36

P(c < X < d) = 0,9

P(X > c) = 0,95 => c = F0,05; 10,5 = 1/ F0,95; 5,10 = 1/3,33 = 0,30

$$F_{n_1-1,n_2-1\,;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1\,;1-\frac{\alpha}{2}}}$$

3

Distribuição Gama

Variáveis Aleatórias Contínuas

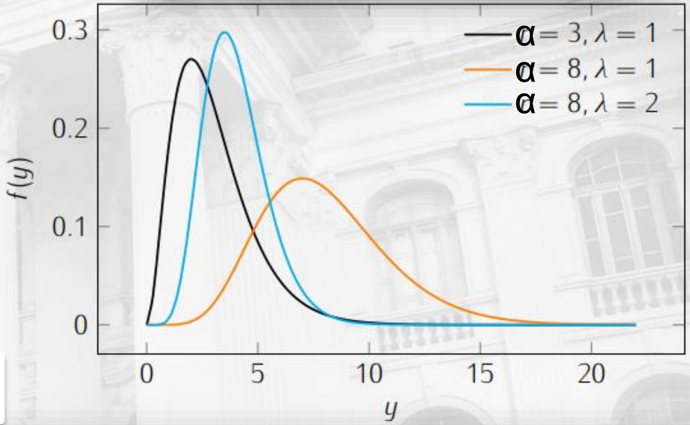
A distribuição exponencial prevê o tempo de espera até o **primeiro** evento. A distribuição gama, por outro lado, prevê o tempo de espera até que o evento **k-ésimo evento** ocorra.

Distribuição Gama

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

- Seja $Y_{Ei} \sim \text{Exp}(\lambda)$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ uma variável com distribuição Exponencial. Então, $Y = Y_{E1} + Y_{E2} + \cdots + Y_{Ek}$ tem distribuição Gama.
- A Gama tem suporte no conjunto dos **reais positivos**, assumindo formas assimétricas.
- Ela tem aplicações na área de **confiabilidade** e análise de **sobrevivência**, assim como a Lognormal.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \; x > 0, \; n > 0,$$



Formulário

- **GAMA** $X \sim G(\alpha, \lambda)$, $(\lambda > 0, \alpha > 0)$

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0; \; E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}; \; \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \; M_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\alpha}, s < \lambda \; ; \; \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}; \; \gamma_2 = 3 + \frac{6}{\alpha}$$

Propriedades:

- $X_i \sim G(\alpha_i; \lambda)$, $(i = 1, 2, ..., k)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i; \lambda\right)$
- $X \sim G(\alpha, \lambda)$ então $Y = cX \sim G(\alpha, \frac{\lambda}{c})$ onde c constante positiva

Distribuição Gama: Exemplos

1. Soma de v.a. com distribuição Exponencial.
2. Tempo de carregamento de um navio.
3. Volume de chuva em dias com precipitação.
4. Tempo de permanência de um usuário em um site.
5. Distribuição de idade de animais em ambiente natural.
6. Tempo de vida de um paciente após transplante.
7. Distância dos passes de bola em um jogo de futebol.

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

Distribuição Gama: Função Densidade de Probabilidade

As **distribuições Exponencial** e **Qui-quadrado** são casos particulares de uma distribuição mais geral, a **distribuição Gama**.

Definição: A v. a. contínua X segue uma distribuição Gama com parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, i. e., $\boldsymbol{X \sim G(\alpha;\ \lambda)}$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},\ x > 0,\ n > 0,}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

O parâmetros caracterizadores desta distribuição são α e λ.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

Distribuição Gama: Função Gama

Para cada número positivo α, seja $\Gamma(\alpha)$ definido como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x = 1$
- Se $\alpha > 1$, então $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$, n interiro positivo.

Distribuição Gama: Relação com outras Distribuições

- A distribuição Gama tem como **caso particular** a distribuição exponencial (λ) ao fixarmos $\alpha = 1$.
- Dessa relação, a Gama pode ser obtida como o **tempo acumulado** para k eventos de Poisson, uma vez que o intervalo entre eventos é Exponencial.
- A Gama tem mais variedades de formas por ter 2 parâmetros, permitindo modelar adequadamente um maior número de variáveis aleatórias que a Exponencial.
- A **soma** de v.a. Gama é Gama, ou seja, se $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ são variáveis aleatórias independentes, com distribuição Gama de parâmetros α e λ, então

$$Y_{\text{soma}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \sim \text{Gama}(k\alpha, \lambda).$$

- A distribuição Erlang é um **caso particular** da Gama quando r é um número natural, $r \in \{1, 2, \ldots\}$.

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

Distribuição Gama: Relação com outras Distribuições

Casos particulares:

- $X \sim \chi^2_n \Leftrightarrow X \sim G\left(\alpha = \frac{n}{2};\ \lambda = \frac{1}{2}\right);$
- $X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X \sim G(\alpha = 1;\ \lambda).$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Distribuição Gama

α Parâmetro de forma
λ Parâmetro de taxa

O aspeto da distribuição depende do valor dos parâmetros (Figura 5.13).

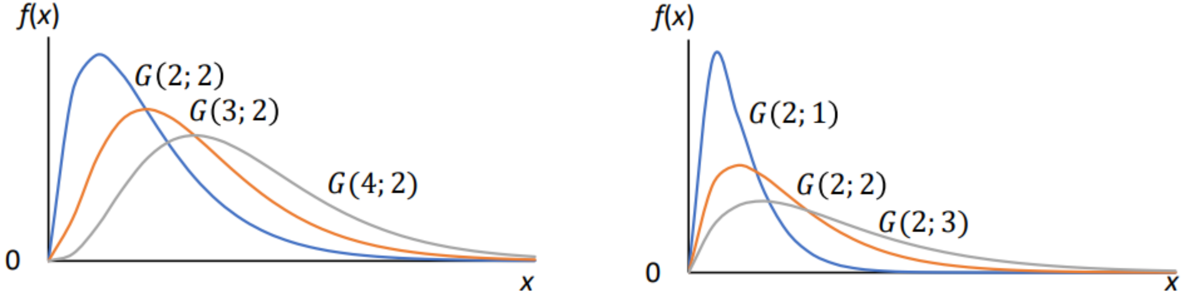


***Figura 5.13:** Função densidade de probabilidade da distribuição Gama para diferentes valores de α e λ.*

Se $X \sim G(\alpha;\ \lambda)$, então $\mu_X = E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

Teorema da aditividade: Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, K$, são v. a. independentes e $X_i \sim G(\alpha_i;\ \lambda)$, então

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} X_i \sim G(\alpha;\ \lambda), \text{com } \alpha = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i.}$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Distribuição Gama

A distribuição Gama pode ser como uma generalização da distribuição Exponencial para descrever a v.a. X que representa **o tempo de espera até à ocorrência do n-ésimo sucesso**. A variável X resulta da soma dos

tempos de espera entre as várias ocorrências sucessivas (X_i) até à ocorrência pretendida. Deste modo, pelo teorema da aditividade como $X_i, i = 1, \dots, n$, são v. a. independentes e $X_i \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X_i \sim G(1;\ \lambda)$, então

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n;\ \lambda).$$

Obrigada!

Questões?