Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia e Gestão

<u>Matemática I</u> – Semestre 2 - 2023/2024

Época Normal – 4 de Junho 2024

Duração: 2h30min

Versão A

Nome: ....

ID Estudante #: ....

Parte I

- Complete os seguintes espaços de forma a obter proposições verdadeiras. As alíneas são independentes.
- Não necessita de justificar as suas respostas.

(a) *(6)* Relativamente ao conjunto $A = [0, 10] \backslash \{3\}$, pode-se concluir que:

1. int(A)= ....
2. sup(A)=........
3. Uma vez que A não é ...., conclui-se que A não é compacto.

(b) *(6)* Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n+1}$. Uma vez que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} u_n = \ldots\ldots\ldots \neq 0,$$

deduz-se que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é ....

(c) *(6)* Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão $-\frac{1}{2}$ e primeiro termo 3. Logo

$$v_3 = ... \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=5}^{+\infty} v_n = ...$$

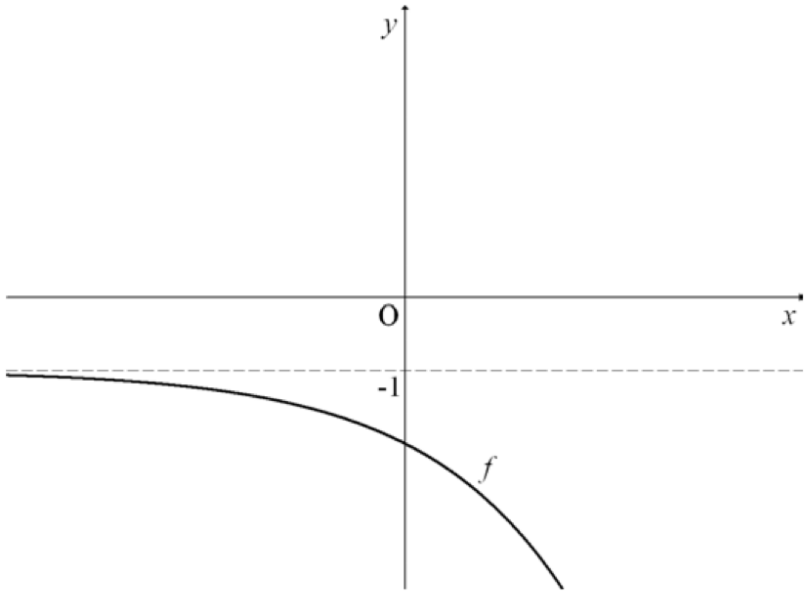
(d) *(10)* Considere a função $f : D_f \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, onde $D_f \subset \mathbb{R}$ representa o domínio de f. Então:

1. $D_f =$ ....;

2. $f(0) =$ .... e $f(......) = 0$;

3. Uma vez que $\lim\limits_{x\to ....} f(x) = -\infty$, pode concluir-se que f não é ....

(e) *(5)* Sejam $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \tan x$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função diferenciável cuja representação gráfica é:



Então

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{3}{(f\circ g)(x)} = ...$$

(f) *(5)* A equação $3x^6 - x^5 - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo fechado .... (como consequência do Teorema de Bolzano).

(g) *(6)* Seja f a função definida por $f(x) = 1 + e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. O polinómio de Taylor de f de grau 2 em $x_0 = 0$ é:

$$P_0^2(x) = \text{...}$$

(h) *(6)* Relativamente a uma função diferenciável (pelo menos duas vezes) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabe-se que:

$$f'(2) = 0 \quad \text{e} \quad f''(2) > 0.$$

Logo, conclui-se que:

- f atinge um .... local em $x = 2$;
- f tem máximo e mínimo absolutos no intervalo ...., como consequência do Teorema de ....

(i) *(6)* Considere a função F, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = \int_x^0 \frac{t^3 + 1}{t^2 + 2}\, \mathrm{dt}.$$

Logo, tem-se:

- $F(0) =$ ....
- $F'(x) =$ ...., como consequência do Teorema .... do ....

(j) *(12)* No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ definidos por:

$$\overline{a} = (-1, 2, 0), \quad \overline{b} = (6, 3, -1) \quad \overline{c} = (-3, 6, 0).$$

Então:

- $\overline{a} - 2\overline{b} =$ (......, ..., ...),
- $\overline{a}.\overline{b} =$ .... e $\|\overline{a}\|^2 =$ ....
- os vetores $\overline{a}$ e $\overline{c}$ são linearmente ....

(k) *(6)* Considere, em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Então pode-se afirmar que:

- uma vez que $\mathbf{A} = \mathbf{A^T}$, a matriz $\mathbf{A}$ diz-se ....
- $\det\left(\mathbf{3A}\right)^{\mathbf{-1}} =$ ....

(l) *(6)* Relativamente ao sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{3\times 3}}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in \mathbf{M_{3\times 1}}(\mathbb{R})$, sabe-se que

- $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$ e
- o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é possível.

Logo $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) =$ .... e o seu grau de indeterminação é igual a ....

Parte II

Nas questões que se seguem, apresente justificações completas e sucintas.

---

1. Considere a seguinte função f, definida em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, por $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x-1}$.

   (a) Encontre os pontos críticos de f.

   (b) Identifique os intervalos onde f é monótona crescente.

   (c) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(2, f(2))$.

   (d) Mostre que a equação $f(x) = \cos(x)$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^-$.

2. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, por $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$.

   (a) Determine $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que:

   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

   (b) Usando a alínea anterior, encontre uma primitiva de f.

3. Considere, em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B^{-1}}$ definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule $\det(\mathbf{A})$ e averigue se os vetores dados pelas linhas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes.

   (b) Calcule $\mathbf{AB}$.

4. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis $x, y, z \in \mathbb{R}$ e parametrizados por $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + 4z & = 1 \\ x - 2y + \alpha z & = \beta \\ 3y + z & = 1 \end{cases} .$$

   (a) Classifique o sistema em função dos parâmetros α e β.

   (b) Determine o conjunto solução do sistema quando $\alpha = 0$ e $\beta = 3$.

Cotações:

I	II.1(a)	II.1(b)	II.1(c)	II.1(d)	II.2(a)	II.2(b)	II.3(a)	II.3(b)	II.4(a)	II.4(b)
80	10	10	10	15	10	10	10	15	15	15