CAPÍTULO 7

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x\,|\,\theta)=\theta(1-\theta)^x \quad (x=0,1,2,3,\ldots),$$

onde $0<\theta<1$. Sabe-se que $E(X)=(1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\Sigma_{i=1}^{1000}x_i=980$.

a) Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.
c) Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
d) Reparametrize a distribuição em função de $\mu=E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
e) Mostre que $T=\Sigma_{i=1}^{1000}X_i$ é estatística suficiente para θ.

2. Pretende-se ter uma ideia da densidade do tráfego em certo local, entre as 8 e as 9 horas. Sabe-se que o número de veículos que aí passam durante esse período segue um processo de Poisson. Fizeram-se as seguintes 9 observações casuais:

(95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70).

a) Obtenha o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para o número médio de veículos que passam naquele local.
b) Mostre que se trata de um estimador consistente e que é o mais eficiente.
c) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de decorrerem pelo menos dois minutos sem passar qualquer veículo.
d) Mostre que $\Sigma_{i=1}^{n}X_i$ é estatística suficiente para a média da população.

3. Considere uma variável aleatória X cuja distribuição depende dos parâmetros α e θ, para a qual se tem $E(X)=\alpha\theta$ e $\mathrm{Var}(X)=\alpha\theta^2$. Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve $\Sigma_{i=1}^{320}x_i=22.2$ e $\Sigma_{i=1}^{320}x_i^2=535.8$, apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.

4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ. Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.

a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ.
c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.

5. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x\,|\,\theta)=\frac{1}{2\theta},\ (-\theta<x<\theta),\ \text{para } \theta>0.$$

Calcule um estimador para θ pelo método dos momentos.

6. Seja X uma variável aleatória discreta em que existe valor esperado e variância. Sabe-se que $E(X)=2\theta+1$, com θ (parâmetro desconhecido) a verificar $0<\theta<0.5$.

a) Determine um estimador para θ pelo método dos momentos, e estude-o quanto a enviesamento e consistência.
b) Sabendo que a função de probabilidade de X é dada por:

X	0	1	2	3
$f(x\mid\theta)$	$0.5-\theta$	θ	$0.5-\theta$	θ

Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ com base na seguinte amostra casual de seis elementos: (1, 0, 2, 3, 2, 0).

7. O tempo que um aluno leva a responder a uma pergunta do exame é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.
a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para λ.
b) Determine a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de perguntas que são resolvidas em menos de 15 minutos.
c) Se um exame tiver oito questões, obtenha uma estimativa para a probabilidade de as resolver todas, sabendo que a duração da prova é 2 horas.

8. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas, X, segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. A fim de estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados são os seguintes:

$$n=10,\ \sum_{i=1}^{10} x_i = 846 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607.$$

Estime a probabilidade do tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.

9. Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ uma amostra casual retirada de uma população com função densidade

$$f(x\mid\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\}\ (x\in\Re),\ \theta>0.$$

a) Calcule o estimador da máxima verosimilhança para θ.
b) Prove que a estatística

$$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é um estimador não enviesado para θ e, sabendo que $E(X^4)=3\theta^2$, calcule a sua variância.
c) Obtenha uma estatística suficiente para θ.

10. A distância percorrida por um veículo pesado de mercadorias num dia de trabalho, em centenas de quilómetros, é uma variável aleatória, X, com média $\mu=\theta+2$, variância $\sigma^2=\theta^2$ e distribuição dada por:

$$f(x\mid\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-2}{\theta}} \text{ para } x>2 \text{, onde } \theta \text{ é um parâmetro desconhecido } (\theta>0).$$

a) Mostre que o estimador de máxima verosimilhança para θ é $\hat{\theta} = \overline{X} - 2$ e analise a sua consistência.

b) Observada uma amostra casual de dimensão 50 obteve-se $\sum_{i=1}^{50} x_i = 350$.

Apresente, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de dias de trabalho em que um veículo desse tipo percorre uma distância superior a 500 quilómetros.

11. Admite-se que o tempo de funcionamento, em milhares de horas, de determinada componente electrónica, *X*, tem distribuição $G(3;1/\theta)$, ou seja, a sua função densidade é dada por

$$f(x\,|\,\theta) = \frac{x^2 e^{-x/\theta}}{2\theta^3} \quad (x>0),\ \theta > 0.$$

Com base numa amostra casual de dimensão *n*, definiram-se os seguintes estimadores para o parâmetro θ:

$$T_1 = \frac{\overline{X}}{3} \ \text{ e } \ T_2 = \frac{n\overline{X}+1}{3n}.$$

a) Estude o enviesamento e a consistência destes estimadores.

b) Qual dos estimadores tem menor erro quadrático médio?

c) Observada uma amostra casual de 10 componentes, registou-se um tempo médio de funcionamento, por componente, de 1600 horas. Calcule o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para θ.

d) Analise os estimadores propostos quanto à suficiência.

12. Seja uma população com distribuição dada por

$$f(x\,|\,\theta) = 2\theta^2 x^{-3} \quad (x>\theta),\ \text{para } \theta>0,$$

e a seguinte amostra de dimensão 5: (15, 8, 10, 5, 17).

a) Compare as estimativas de θ, obtidas pelos métodos dos momentos e da máxima verosimilhança.

b) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para a média da população.

13. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade dada por

$$f(x\,|\,\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \quad (0<x<\theta),\ \text{para } \theta>0.$$

Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para a média da população. Justifique.

14. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade

$$f(x\,|\,\theta) = \frac{3\sqrt{x}}{2\theta}\exp\left\{-\frac{x^{3/2}}{\theta}\right\} \quad (x>0),\ \text{para } \theta>0.$$

a) Mostre que

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{3/2}}{n},$$

é o estimador da máxima verosimilhança para θ.

b) Sabendo que $X^{3/2}$ tem distribuição exponencial de média θ, estude o enviesamento e a consistência do estimador da alínea a).

15. Retirou-se uma amostra casual de dimensão n de uma população uniforme no intervalo $(0,\beta)$, onde β é um parâmetro positivo.

a) Determine um estimador não enviesado para β e calcule a sua variância.

b) Diga, justificando, se pode afirmar que o estimador calculado na alínea anterior é o mais eficiente.

16. Seja X uma população com função probabilidade

$$f(x\,|\,\alpha)=\alpha\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{1-x}\quad (x=0,1)\text{, com } 0<\alpha<1\,.$$

a) Determine o estimador da máxima verosimilhança para α, e verifique se é centrado.

b) Qual é a distribuição da variável aleatória X ?

17. Suponha-se que (X_1,X_2,X_3,X_4) é uma amostra casual retirada de uma população normal, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

a) Mostre que

$$T_1=\frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$$

é um estimador centrado para μ, e calcule a eficiência relativa desse estimador em relação ao estimador $\overline{X}$.

b) Determine o valor de k de forma que

$$T_2=k\{(X_2-X_1)^2+(X_3-X_2)^2+(X_4-X_3)^2\}$$

seja um estimador não enviesado para a variância da população.

18. São propostos os seguintes estimadores para a variância de uma população normal de média μ conhecida:

$$T_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}\,,\; T_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}\;\text{ e }\;T_3=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}\,.$$

a) Analise-os quanto às seguintes propriedades: enviesamento, consistência e eficiência.

b) Compare os EQM dos três estimadores.

19. Com base numa amostra aleatória de dimensão três, (X_1,X_2,X_3), de uma população com distribuição exponencial, foram propostas as seguintes estatísticas para estimar a média:

$$T_1=X_1\,,\; T_2=\frac{X_1+X_2}{2}\,,\; T_3=\frac{X_1+2X_2}{3}\;\text{ e }\;T_4=\overline{X}\,.$$

a) Verifique que todos eles são estimadores não enviesados da média.

b) Calcule a eficiência relativa entre os estimadores.

c) Mostre que T_4 é uma estatística suficiente.

20. Considere duas amostras casuais e independentes de dimensões n e m, de uma população de Poisson de média λ, e sejam $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ as respectivas médias amostrais. Sendo

$$T_1 = \frac{n\bar{X} + m\bar{Y}}{n+m} \text{ e } T_2 = \frac{1}{2}(\bar{X} + \bar{Y})$$

dois estimadores para λ, mostre que ambos são não enviesados, e determine qual deles é mais eficiente.

21. A altura máxima das ondas durante um ano, em determinado local, é uma variável aleatória com função densidade

$$f(x \mid \theta) = \frac{x}{\theta} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\} \quad (x > 0).$$

a) Com base na amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.
b) Mostre que a quantidade de informação de Fisher é igual a $1/\theta^2$. (Nota: X^2 tem distribuição exponencial com média 2θ).
c) Mostre que se trata de um estimador não enviesado, e investigue a sua eficiência.
d) Admita que nos últimos 6 anos se observaram as seguintes alturas máximas:

3.1, 2.4, 2.6, 2.2, 1.9, 2.8.

Calcule uma estimativa para $P(X > 3)$.

22. Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f(x \mid \theta) = e^{-(x+\theta)} \quad (x > -\theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Com base na amostra casual $(X_1, X_2, ..., X_n)$ construíram-se as estatísticas

$$T_1 = -\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ e } T_2 = 1 - \bar{X}.$$

a) Mostre que T_2 é um estimador não enviesado e consistente de θ.
b) Verifique se T_1 é um estimador consistente, mas enviesado, de θ. Corrija o enviesamento.
c) Compare o segundo estimador com o primeiro, corrigido do enviesamento.

23. De uma população com função probabilidade dada por

$$f(x \mid \theta) = \frac{2(1-\theta)^{x-1}\theta^{2-x}}{x(1+\theta)} \quad (x = 1, 2), \text{ para } \theta > 0,$$

retirou-se uma amostra casual de dimensão n.

a) Deduza o estimador da máxima verosimilhança para θ.
b) Sabendo que

$$E(X) = \frac{2}{1+\theta} \text{ e } \mathrm{Var}(X) = \frac{2\theta(1-\theta)}{(1+\theta)^2},$$

mostre que $\bar{X}$ é o estimador da máxima verosimilhança para $E(X)$, e analise a sua consistência.

24. Classifique as afirmações apresentadas abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.
    a) Com base numa amostra casual de dimensão $n=3$, o estimador $T=0.5\,X_1+0.4\,X_2+0.1\,X_3$, sendo centrado é também o estimador mais eficiente para μ.
    b) Comparar os Erros Quadráticos Médios de dois estimadores centrados (referentes ao mesmo parâmetro) equivale a comparar as respectivas variâncias.
    c) Um estimador consistente é sempre centrado.

25. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com distribuição binomial de parâmetros 2 e θ, ou seja,

$$f(x\,|\,\theta)=\binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}\quad (x=0,1,2)\text{, para } 0<\theta<1.$$

    a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para θ, e estude o seu enviesamento.
    b) Sabendo que $\Im(\theta)=2/\{\theta(1-\theta)\}$, mostre que o estimador obtido na alínea a) é o mais eficiente para θ.
    c) Com base numa amostra casual de 100 observações, onde se obteve

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 130,$$

    deduza um intervalo de confiança a 95% para θ, utilizando a distribuição assintótica dos estimadores da máxima verosimilhança.

26. Seja uma população com distribuição dada por

$$f(x\,|\,\theta)=\frac{1}{2\theta}\exp\left\{-\frac{|\,x\,|}{\theta}\right\}\quad (x\in\Re)\text{, para } \theta>0,$$

da qual se obteve a seguinte amostra casual: (–2, 0.5, 2.5, –3.1, 2.1). Sabe-se ainda que $Y=|\,X\,|$ é uma variável aleatória com distribuição exponencial com desvio padrão igual a θ.
    a) Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
    b) Obtenha uma estimativa para θ pelo método da máxima verosimilhança.
    c) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para θ.

27. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com distribuição dada por

$$f(x\,|\,\theta)=\theta(1-x)^{\theta-1}\quad (0<x<1)\text{, para } \theta>1.$$

    a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para θ.
    b) Mostre que o limite inferior para a variância dos estimadores não enviesados de θ é θ^2/n.
    c) Utilizando a distribuição assintótica dos estimadores da máxima verosimilhança, deduza um intervalo de confiança a 90% para θ.

28. Na secção de enchimento de latas de tinta de um litro, procede-se a medições regulares para evitar grandes disparidades nos conteúdos das latas. A quantidade de tinta

(em litros) por lata segue uma distribuição normal com desvio padrão igual a 0.06. Numa amostra de 16 latas observou-se uma média de 0.95 litros.

a) Obtenha uma estimativa da máxima verosimilhança para a proporção de latas com mais que um litro de tinta.
b) Com base na informação da amostra, afirma-se que a quantidade média de tinta numa lata se situa entre 0.911 e 0.989 litros. Comente e diga qual a confiança a depositar nessa afirmação.
c) Como procederia se quisesse reduzir para metade a amplitude do intervalo de confiança da alínea anterior?

29. O departamento de manutenção de uma empresa quer estabelecer um contrato de manutenção de máquinas. O tempo de reparação (em minutos) de cada máquina é uma variável aleatória X. Procedeu-se à recolha dos tempos de reparação de 10 máquinas escolhidas ao acaso, tendo obtido os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 850 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72610 .$$

Com base nos dados recolhidos, e admitindo que o tempo de reparação tem distribuição normal, afirmou-se que o tempo médio de reparação por máquina se situava entre um mínimo de 79.4 e um máximo de 90.6 minutos. Qual a confiança a atribuir a essa afirmação?

30. Com base numa amostra casual com 16 observações, retirada de uma população normal, construiu-se, segundo o processo habitual, o seguinte intervalo de confiança para o valor esperado: (7.398, 12.602).

a) Sabendo que, com a informação da amostra, se obteve $s = 3.872$, qual o grau de confiança que pode atribuir ao intervalo atrás referido?
b) Com base na mesma amostra, construa um intervalo de confiança a 95% para a variância da população.
c) Suponha que a verdadeira variância é 36. Se pretender construir um intervalo de confiança a 95% para a média, de modo que a respectiva amplitude não exceda 6.5, qual é a dimensão mínima da amostra a recolher?

31. Considere uma população com distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Dessa população foi retirada uma amostra casual de dimensão 25. Suponha que a amostra forneceu os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 75 \text{ e } \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 321.$$

a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média.
b) Construa um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão.

32. Seja X uma população normal com desvio padrão 1.5. Com base numa amostra casual de dimensão 25 seleccionada dessa população, construiu-se, pelo processo habitual, o seguinte intervalo de confiança para a média:

$$(\bar{x} - 0.6162 , \bar{x} + 0.6162) .$$

a) Qual o grau de confiança deste intervalo?

b) Qual deve ser a dimensão da amostra para diminuir para metade a amplitude do intervalo, para o mesmo grau de confiança?

33. Pode considerar-se que o grau de acidez do azeite de determinada marca é uma variável aleatória com distribuição normal.
   a) Analisada uma amostra de 16 garrafas, obteve-se para o grau de acidez uma média de 1.3 graus e uma variância corrigida de 0.16. Sabendo que essa marca garante, nos rótulos das embalagens do seu produto, um grau de acidez médio não superior a 1, diga, com base num intervalo de confiança a 95%, se pode acusar a empresa que comercializa a marca de publicidade enganosa?
   b) Supondo que o desvio padrão da população é igual a 0.4 graus, qual deve ser a dimensão da amostra a recolher de forma a garantir, com confiança de 99%, um desvio máximo de ±0.3 graus entre a média observada e o seu verdadeiro valor?

34. De uma população normal foi retirada uma amostra casual de dimensão 15 tendo-se observado

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 30 \text{ e } \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 62.25 .$$

   a) Determine um intervalo de confiança a 95% para a média da população.
   b) Com base na mesma amostra, e recorrendo à metodologia habitual, obteve-se o intervalo de confiança, $(0.3082, 0.5851)$, para o desvio padrão da população. Qual o grau de confiança correspondente?

35. Pretendendo-se estabelecer algumas inferências sobre os consumos semestrais de cimento das empresas de artefactos e pré-fabricados na produção de determinado produto, agruparam-se as empresas em quatro classes, consoante as quantidades (em toneladas) de cimento compradas anualmente às cimenteiras:

   classe I – [0, 650); classe III – [1200, 3000);
   classe II – [650, 1200); classe IV – [3000, 10 000].

   Recolheram-se amostras casuais em cada classe relativas às quantidades de cimento utilizadas na produção de determinado produto. Obtiveram-se os seguintes resultados.

Classes	**N.º de empresas na amostra**	**Consumo médio de cimento**	**Desvio padrão (*s*)**
I	30	55	24.1
II	31	190	70.2
III	11	350	73.5
IV	8	940	389.3

   Admita também que o consumo semestral de cimento na produção desse produto tem uma distribuição normal.
   a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média do consumo semestral de uma empresa da primeira classe de vendas.
   b) Com base num intervalo de confiança a 95% pode considerar-se que a dispersão da característica em estudo é semelhante para as empresas das segunda e terceira classes de vendas?

36. Uma empresa agrícola tem ao seu serviço dois tractores idênticos. O consumo de combustível, por hora de trabalho, em cada um deles é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Para efeitos de controlo de consumo, obtiveram-se ao acaso as seguintes amostras respeitantes aos tractores:

    Tractor 1: 9.0, 9.5, 9.8, 9.4, 10.0, 10.2, 9.6, 9.7, 9.5;
    Tractor 2: 10.0, 9.6, 9.9, 9.7, 10.1.

    a) Partindo do princípio de que não há razões para supor diferenças no desvio padrão do consumo nos dois tractores, construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias.
    b) Admitindo que as variâncias do consumo nos dois tractores são diferentes, construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias.
    c) Com base num intervalo de confiança a 90% para o quociente das variâncias, decida qual dos intervalos de confiança para a diferença de médias lhe parece o mais adequado.

37. Para comparar dois métodos de ensino, dividiu-se aleatoriamente uma turma de 22 alunos em dois grupos iguais. Cada grupo foi ensinado com um método diferente (método *A* e método *B*) e, no fim da formação, foram sujeitos à mesma prova de avaliação. Os resultados da avaliação, numa escala de 0 a 100, foram os seguintes:

    Método *A*: $\bar{x}_A = 74.8$; $s_A'^2 = 81.5$.
    Método *B*: $\bar{x}_B = 72.1$; $s_B'^2 = 110.5$.

    Admita que as classificações obtidas em cada grupo têm distribuição normal.

    a) Construa um intervalo de confiança a 95% para o quociente das variâncias dos dois grupos.
    b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, construa um intervalo de confiança a 99% para a diferença de médias. Interprete o resultado obtido.

38. Classifique as afirmações apresentadas abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

    a) Algumas variáveis fulcrais podem ser estimadores.
    b) Se $(14.3, 15.7)$ for um intervalo de confiança a 95% para μ é legítimo escrever $P(14.3 < \mu < 15.7) = 0.95$.
    c) Fixada a dimensão da amostra e recorrendo ao método habitual, quanto menor a confiança, maior a precisão do estimador por intervalos para a média de um universo normal de variância conhecida.
    d) Recorrendo ao procedimento habitual em universos normais, pode-se garantir que os intervalos de confiança para σ^2 são simétricos em torno de s'^2.

39. Para se estudar a regularidade de uma dada moeda fizeram-se 500 lançamentos, tendo-se observado 280 "faces". Obtenha uma estimativa por intervalo de confiança, a 95%, para a probabilidade de sair "face". O que pode concluir sobre a regularidade da moeda?

40. Uma cadeia de televisão fixou como objectivo ter uma audiência, para a telenovela XYZ, de pelo menos 55% dos telespectadores. Consultada uma empresa de audio-

metria, ficou estabelecido que semanalmente a empresa interrogaria por telefone, dentro do horário da novela, uma amostra casual de 200 telespectadores e registaria quantos estavam a ver a referida novela. Em determinada semana obtiveram-se 90 respostas positivas. Construa um intervalo de confiança a 95% para a percentagem de telespectadores da telenovela XYZ nessa semana. Com base neste intervalo, diga o que pode concluir sobre o cumprimento do objectivo fixado.

41. Numa amostra de 200 indivíduos que utilizam o automóvel nas suas deslocações casa-emprego, 50 declaram-se disponíveis para passar a utilizar o metropolitano caso este passasse a chegar à sua zona de residência. Com base nos resultados apresentados:
    a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a verdadeira proporção de indivíduos nessas condições.
    b) Qual deve ser a dimensão da amostra a recolher para reduzir a amplitude desse intervalo a metade, mantendo o mesmo grau de confiança?

42. Com o advento das novas tecnologias de informação (*software*, multimédia, *internet*, etc.) são, naturalmente, questionados os métodos tradicionais de ensino. Em experiências realizadas utilizando metodologias mais apelativas, com um grupo de 64 alunos, observou-se uma taxa de aprovação de 65%, enquanto num grupo de igual número de alunos, e para as mesmas matérias mas pelos métodos tradicionais, se obteve uma taxa de aprovação de 50%.
    a) Utilizando um intervalo de confiança adequado, com um nível aproximado de 90%, pode concluir-se que é urgente mudar os métodos de ensino?
    b) Explicite os pressupostos de construção do intervalo de confiança da alínea anterior, e analise em que medida alterações no grau de confiança podem conduzir a opinião diferente.

43. Pretende obter-se uma estimativa para a proporção de utentes dos comboios da linha de Cascais que utilizam também o metropolitano para alcançar o seu destino final. Para tal inquiriram-se, ao acaso, 500 passageiros da referida linha dos quais 320 declararam utilizar também o metropolitano na sua deslocação.
    a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a proporção de passageiros da linha de Cascais que são também utilizadores do metropolitano. Interprete o resultado obtido.
    b) Caso se pretendesse conhecer aquela proporção com uma margem de erro não superior a 2%, para um grau de confiança de 90%, quantos passageiros deveriam ser inquiridos?

44. Pretende saber-se qual a proporção de consumidores do produto *A*. Para tal foram recolhidas amostras de 200 pessoas nas cidades *F* e *G*, tendo-se observado, respectivamente, 140 e 160 consumidores desse produto.
    a) Determine, com um grau de confiança de 95%, a percentagem de consumidores do produto *A* na cidade *F*.

b) Pode afirmar-se, com um grau de confiança de 99%, que o consumo do produto A é superior na cidade F?

45. A empresa "Inbox4all" disponibiliza um serviço de correio electrónico para os seus clientes. Grande parte das reclamações recebidas na empresa relacionam-se com o tempo de espera até chegar à caixa de correio. Para estudar esta questão observou-se uma amostra casual de 100 observações, obtendo-se um tempo médio de 17 segundos e um desvio padrão de 6 segundos. Construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio de espera. Com base neste intervalo, diga se pode afirmar que este tempo médio não ultrapassa os 20 segundos.

46. Com o objectivo de comparar a autonomia (duração da carga da bateria, em horas) de dois modelos de telemóveis, recolheu-se a seguinte informação:

	N.º de aparelhos	**Duração da carga da bateria**	
Modelo	**Observados**	**Média**	**Desvio padrão corrigido**
A	40	6.5	3.0
B	50	5.5	2.5

Com base num intervalo de confiança a 95% poder-se-á afirmar que não existem diferenças significativas entre os modelos testados, no que respeita à duração média da carga da bateria.

47. O número de componentes defeituosas produzidas diariamente por uma máquina segue um processo de Poisson. Em média essa máquina produz duas componentes defeituosas por dia (8 horas). Com o objectivo de substituir a máquina em causa, foi testada uma nova máquina. Nos 30 dias de teste, registou-se um total de 40 componentes defeituosas produzidas pela nova máquina. Admitindo que o número de componentes defeituosas produzidas diariamente por esta máquina também segue um processo de Poisson, determine um intervalo de confiança a 95% para o número médio de componentes defeituosas produzidas diariamente por esta máquina, e interprete o resultado.

48. Deduza um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro de uma distribuição uniforme, $U(0,\theta)$, com base numa amostra de dimensão 100.

49. Com o objectivo de avaliar o efeito da dimensão da turma sobre o aproveitamento dos alunos recolheu-se a seguinte informação (amostras casuais de alunos da mesma disciplina):

Classificação (0-20)	**<8**	**[8, 10)**	**[10, 12)**	**[12, 14)**	**≥ 14**	**Total**
Turmas grandes	12	42	30	11	5	100
Turmas pequenas	4	30	40	21	5	100

a) Construa um intervalo de confiança a 90% para a nota média dos alunos de turmas pequenas.

b) Construa um intervalo de confiança a 90% para a diferença na classificação média das duas populações e comente o resultado obtido.

c) Com base num intervalo de confiança a 90%, diga se pode afirmar que a proporção de alunos com nota positiva é maior nas turmas pequenas.

50. Uma empresa de distribuição de piza, ao estudar o intervalo de tempo (em minutos) entre chegadas de pedidos, obteve, em 50 observações, uma soma de tempos igual a 550 minutos. Admite-se que o tempo entre chegadas de pedidos segue uma distribuição exponencial.
    a) Obtenha uma estimativa, da máxima verosimilhança, para a $P(X > 15)$.
    b) Construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio entre pedidos, comentando se é razoável ser de 10 minutos esse intervalo de tempo.

51. O tempo de atendimento de uma pessoa no balcão do serviço pós-venda da loja "Pague e Leve" pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro θ, ou seja, $f(x|\theta) = \theta\, e^{-\theta x}$, $x > 0$.
    Observada uma amostra casual de 10 pessoas atendidas nesse balcão, obteve-se um tempo médio de atendimento de 6.5 minutos.
    a) Calcule a estimativa da máxima verosimilhança para o desvio padrão da população.
    b) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para θ.

52. Seja X uma população com distribuição exponencial de parâmetro λ.
    a) Retirada uma amostra casual de dimensão 1, X_1, determine o valor de k de modo a que o intervalo
    $$\left(0, \frac{k}{x_1}\right)$$
    seja um intervalo de confiança a 90% para λ.
    b) Recolheram-se de forma independente duas amostras casuais de dimensão 5 com médias $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$, respectivamente. Tendo-se observado $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = 6$, obtenha um intervalo de confiança a 90% para o parâmetro λ.

53. Para a instalação de um parque eólico numa determinada região pretende-se estudar a velocidade mínima diária do vento nessa região (em km/h), X, que se admite ser uma variável aleatória com $\mu = E(X) = 3\theta/2$, $Var(X) = 3\theta^2/4$ e função densidade $f_X(x|\theta) = \dfrac{3\theta^3}{x^4}$ para $x > \theta$, em que $\theta > 0$ é um parâmetro desconhecido.
    Observada uma amostra casual de 200 dias obtiveram-se os seguintes resultados para a velocidade mínima diária do vento,

Média	Variância corrigida	Mediana	Mínimo	Máximo
5.19	51.81	3.78	3.05	64.40

    a) Deduza o estimador de θ pelo método dos momentos. Calcule a respectiva estimativa e comente o resultado obtido.

SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 7

1. a) 0.5051; b) $1/(1+\bar{X})$; c) 0.98.
2. a) 90; c) 0.0498.
3. 0.00288, 24.06576.
4. a) 17; b) 13.
5. $\sqrt{3\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \big/ n}$.
6. a) $(\bar{X}-1)/2$; b) 1/6.
7. a) $1/\bar{X}$; b) 0.7135; c) 0.78.
8. 0.1977.
9. a) $\Sigma_{i=1}^{n} X_i^2 / n$; b) $2\theta^2 / n$.
10. b) 0.549
11. b) T_1 ; c) $\bar{X}/3$, 533.333.
12. a) 5.5, 5; b) $2\min(X_1,...,X_n)$.
13. $(2/3)\max(X_1,...,X_n)$.

15. a) $2\bar{X}$, $\beta^2/(3n)$.
16. a) $\bar{X}$; b) $B(1,\alpha)$.
17. a) 2/3; b) 1/6.

20. T_1 se $m \neq n$, caso contrário coincidem.
21. a) $\Sigma_{i=1}^{n} X_i^2 /(2n)$; d) 0.2452.

23. a) $(2-\bar{X})/\bar{X}$.
24. a) F; b) V; c) F.
25. a) $\bar{X}/2$; c) (0.5839, 0.7161) (aproximadamente) ou (0.6137; 0.6806).
26. a) 1.5659; b) 2.04; c) (0.996, 6.283).
27. a) $\hat{\theta} = -n / \Sigma_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)$;
    c) $[\,\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\hat{\theta}/\sqrt{n}, \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\hat{\theta}/\sqrt{n}\,]$ (aproximadamente) ou
    $[\,\hat{\theta}\sqrt{n}/(z_{\alpha/2}+\sqrt{n}), \hat{\theta}\sqrt{n}/(-z_{\alpha/2}+\sqrt{n})\,]$.
28. a) 0.2033; b) 0.9906.
29. 0.9793 ($\approx$ 0.98).
30. a) 0.98; b) (8.727, 38.306); c) 14.
31. a) (2.174, 3.826); b) (2.439, 7.742).
32. a) 0.96; b) 100.
33. a) (1.087, 1.513); b) 12.
34. a) (1.778, 2.222); b) 0.90.
35. a) (45.848, 64.152); b) (0.259, 2.151).
36. a) $(-0.603, 0.150)$; b) $(-0.555, 0.101)$; c) (0.472, 10.939).
37. a) (0.365, 5.044); b) $(-9.186, 14.586)$.
38. a) F; b) F; c) F; d) F.
39. (0.516, 0.603).
40. (0.381, 0.519).

41. a) (0.19, 0.31) ; b) 800.
42. a) (0.008, 0.292).
43. a) (0.598, 0.680); b) 1692.
44. a) (0.6365, 0.7635); b) $(-0.2108, 0.0108)$.
45. (15.818, 18.182).
46. (– 0.1595, 2.1595).
47. (0.920, 1.746).
48. $(1.797\,\bar{x}, 2.255\,\bar{x})$.
49. a) (10.443, 11.237); b) (–1.624, –0.376); c) (–0.313, –0.087).
50. a) 0.256; b) (8.490, 14.815).
51. a) 6.5; b) (0.074, 0.263).
52. a) 2.3026; b) (0.1809, 0.5235).
53. a) 3.46; b) (4.192, 6.188).