Matemática II (1.º semestre, 2025/2026)
Exame da Época Normal
13 de dezembro de 2025

Nome: ____ N.º de aluno/a: ____________

____

____

Leia cuidadosamente as instruções seguintes:

1. Os telemóveis devem ser desligados e guardados. A utilização de telemóveis, *smartwatches*, computadores portáteis e demais equipamentos de comunicação é estritamente proibida durante a realização da prova. **A sua utilização determinará a anulação da prova, sem prejuízo da aplicação de outras eventuais sanções.**
2. Durante a prova os alunos não podem comunicar entre si por quaisquer meios. Qualquer tentativa de comunicação implicará a anulação das provas dos intervenientes.
3. É permitida a consulta de um formulário, preparado pelo próprio aluno, que não exceda 1 folha (2 páginas) A4.
4. **Não é permitido o uso de calculadora**.
5. As respostas deverão ser escritas a caneta preta ou azul e com letra legível. **Respostas a lápis ou a outra cor não serão consideradas.**
6. Só é permitido sair da sala 30 minutos após o início da prova, não sendo possível voltar a entrar. A saída da sala implicará a entrega da prova, ou a desistência.
7. Não serão esclarecidas dúvidas durante a prova. Quaisquer dúvidas deverão ser apresentadas por escrito para que possam ser, eventualmente, consideradas na correção.

O exame tem uma duração de duas (2) horas.

Matemática II (1.º semestre, 2025/2026) – Exame da Época Normal

1. Considere a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1 val.) (a) Calcule os valores próprios de A.

(1 val.) (b) Calcule os vetores próprios associados aos valores próprios encontrados em (a).

(1 val.) (c) Indique, justificando se existe, uma matriz P tal que A é semelhante a uma matriz diagonal D, isto é, $P^{-1}AP = D$. (Não é necessário evidenciar as matrizes P e D.)

($1/2$ val.) (d) Indique a expressão analítica da forma quadrática $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T A\mathbf{X}$ associada à matriz A.

(1 val.) (e) Classifique a forma quadrática.

2. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y}\ln(x-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

(1 val.) (a) Determine analiticamente D_f, o domínio da função f e represente-o graficamente.

($1\frac{1}{2}$ val.) (b) Determine analiticamente o interior e a fronteira de D_f.

(1 val.) (c) Decida, justificando, se o conjunto D_f é aberto, se é fechado e se é limitado.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}, & \text{se } x^2+y^2 < 1, \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

($1\frac{1}{2}$ val.) (a) Mostre que f é contínua em $(1,0)$.

($1\frac{1}{2}$ val.) (b) Verifique que a função

$$g(x,y) = f(x,y) \cdot \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

é diferenciável no ponto $(0,0)$ e calcule $Dg(0,0)(\mathbf{h})$, em que $\mathbf{h} = (h_1,h_2)$.

4. Considere a função $f(x,y) = x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x + 2y$.

($1\frac{1}{2}$ val.) (a) Determine e classifique todos os pontos críticos de f.

($1\frac{1}{2}$ val.) (b) Sabendo que f tem um minimizante global no conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1\}$, determine-o.

5. Considere o conjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, y \leq 2-x^2\right\}$.

(1 val.) (a) Esboce a região R.

(1 val.) (b) Calcule $\iint_R (xy-1)\,dxdy$.

6. Considere a equação diferencial $y'' - y' - 6y = -18x^2 - 6x$.

(1 val.) (a) Mostre que $\varphi(x) = 3x^2 + 1$ é solução da equação diferencial.

($1\frac{1}{2}$ val.) (b) Determine a solução da equação diferencial que verifica as condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$.

($1\frac{1}{2}$ val.) 7. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, e defina

$$g(x,y) = h\left(\frac{3x}{2y}\right), \qquad y \neq 0.$$

Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y}\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$