

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA I

DATA: 4 de julho de 2023

Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique todas as respostas.

1. Uma empresa agroalimentar vai produzir três novas rações diferentes para as quais tem uma procura elevada e já se comprometeu com um cliente a fornecer 100 toneladas diárias. Há dois ingredientes principais que entram na composição de todas as rações e que estão limitados às quantidades diárias de 240 e 300 toneladas, respetivamente. Para obter o plano de produção diário de menor custo foi formalizado o problema

$$\min z = 36x_1 + 27x_2 + 30x_3$$

$$s. a: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

para o qual se obteve o seguinte quadro ótimo,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z(min)	-6	0	0	-64	-3	0	2880
x_3	1	0	1	-3	-1	0	60
x_2	0	1	0	2	1	0	40
x_6	2	0	0	0	-1	1	60

onde x_4, x_5 e x_6 são as variáveis auxiliares associadas às restrições 1, 2 e 3, respetivamente.

- Escreva o dual do problema e a sua solução ótima.
 - Faça um pequeno relatório para a direção da empresa com os resultados mais relevantes.
 - Para que valores do custo unitário da primeira ração é que ela faria parte do plano ótimo?
 - Quais as consequências de se exigir a produção de pelo menos 10 unidades da primeira ração?
 - Há a possibilidade de substituir uma das três rações por uma semelhante, que precisa de 2,5 toneladas tanto do ingrediente 1 como do ingrediente 2 e que tem um custo de 28 por cada tonelada de ração. Valerá a pena?
2. Nos próximos 4 trimestres uma empresa vai produzir um produto para satisfazer a procura de 55, 35, 35 e 35 unidades nos trimestres T1, T2, T3 e T4, respetivamente. A capacidade de produção em cada trimestre é de 40 unidades, ao custo unitário de 24, 20, 22 e 26, conforme a produção seja feita no T1, T2, T3 ou T4. A quantidade produzida num trimestre pode ser usada para satisfazer a procura ainda nesse trimestre (ao custo indicado anteriormente) ou num trimestre posterior, o que originará uma redução no custo de 2 u.m. por unidade antecipada um trimestre. Caso a procura seja satisfeita com atraso incorre-se numa multa de 3 u.m. por unidade entregue um trimestre atrasado (se for antecipado 2 trimestres ou atrasado 2 trimestres os valores dos benefícios ou multas serão o dobro e assim sucessivamente).
- Formalize o problema como um problema de transporte.

- b) Determine uma solução básica admissível pelo método do mínimo da matriz de custos. Averigue se a solução obtida é ótima e, caso não seja, faça uma iteração do algoritmo de Dantzig para determinar uma melhor e interprete-a.

Se não resolveu a alínea a) considere os dados seguintes para o problema de transporte

$$a = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 35 \\ 25 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 34 & 33 & 33 & 35 \\ 31 & 22 & 25 & 30 \\ 23 & 20 & 24 & 22 \\ 26 & 26 & 28 & 29 \end{bmatrix}.$$

3. Cem candidatos fizeram várias provas para se candidatarem a quatro vagas numa empresa. Os cinco melhores candidatos obtiveram as seguintes classificações para cada uma das quatro vagas existentes na mesma empresa.

	Vaga 1	Vaga 2	Vaga 3	Vaga 4
Candidato 1	96	98	93	94
Candidato 2	93	93	95	94
Candidato 3	94	95	92	93
Candidato 4	92	94	93	92
Candidato 5	93	96	95	94

A empresa pretende selecionar apenas quatro dos cinco candidatos para preencherem as quatro vagas, de modo a maximizar a média das classificações, sabendo que o candidato 1 não pode ocupar a vaga 4 e que o candidato 3 tem de ser selecionado.

Formalize o problema e resolva-o por um algoritmo conhecido, justificando todas as decisões.

4. Considere o seguinte problema de PL

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ \alpha x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}, & \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- a) Indique, justificando, um valor de α para o qual o problema tenha soluções ótimas alternativas e resolva-o para esse valor de α .
- b) Determine um valor de α para o qual o dual tenha soluções ótimas alternativas e obtenha-as sem resolver o problema dual pelo Simplex. Justifique todas as suas escolhas.

Cotações

1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3	4a	4b
1,5	2	2	2	2	2	2,5	2	1,5	2,5