

## PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA I

DATA: 28 de junho de 2024

Duração: 2 horas

**Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.**

1. Uma empresa de artesanato está a estudar a produção de quatro produtos (P1, P2, P3 e P4), para os quais sabe ter uma procura de 100 unidades. Com essa produção pretende escoar uma matéria prima que possui em armazém e dispõe de 600 horas de trabalho. Com o objetivo de determinar um plano de produção a custo mínimo foi criado e resolvido o modelo de PL seguinte (sendo  $x_5, x_6$  e  $x_7$  as variáveis auxiliares associadas à primeira, segunda e terceira restrições, respetivamente).

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s. a } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 \geq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	t.i.
$z(\min)$	0	-7/2	0	-5/2	0	-1/2	0	225
$x_5$	1/3	1/6	0	1/2	1	1/6	0	25
$x_3$	2/3	5/6	1	1/2	0	-1/6	0	75
$x_7$	-2/3	5/3	0	6	0	2/3	1	300

- Faça um pequeno relatório para apresentar ao gerente da empresa, com toda a informação que pode obter diretamente do quadro ótimo apresentado.
- O gerente pretende saber se é possível ter um plano ótimo em que se produzam pelo menos dois produtos diferentes. Em caso afirmativo, apresente todas as possibilidades.
- Para que valores do custo do produto P3 se pode garantir que a solução ótima do quadro apresentado se mantém?
- Foi decidido ignorar a restrição de procura e não considerar o produto P3, isto é, estudar apenas a produção dos produtos P1, P2 e P4.
  - Apresente o novo problema e escreva o seu dual; resolva o dual graficamente.
  - A partir da solução ótima obtida em i), use as relações de complementaridade para obter o novo plano ótimo de produção.
  - Determine o intervalo de sensibilidade para o coeficiente de  $x_1$  na função objetivo. (Sugestão: resolva a questão graficamente)

2. Numa empresa de rádio-táxis foram recebidos, nos últimos minutos, cinco pedidos de certa região (P1, P2, P3, P4 e P5). Nessa zona encontram-se três carros já disponíveis e um que em breve ficará. A cada um dos quatro carros falta apenas realizar mais um serviço completo para terminar o dia de trabalho. Dois dos táxis estão na praça do centro da localidade e demorarão 5, 10, 15, 20 e 13 minutos a chegar aos locais das chamadas P1, P2, P3, P4 e P5, respetivamente. O outro táxi livre encontra-se na estação de comboios e demorará 9, 6, 17, 15 e 5 minutos a chegar aos locais das chamadas P1, P2, P3, P4 e P5, respetivamente. O quarto carro vagará dentro de cinco minutos e, depois, demorará 3, 7, 20, 12 e 10 minutos a chegar aos locais das chamadas P1, P2, P3, P4 e P5, respetivamente. Dois dos pedidos são especiais: P5, porque deve ser atendido dentro de 14 minutos, no máximo, e P3 porque deverá obrigatoriamente ser atendido por um dos quatro táxis que se encontram na região. O problema consiste em afetar o serviço aos quatro táxis, respeitando os requisitos referidos e de modo a minimizar o tempo total gasto. Formalize este problema (definindo todas as variáveis e justificando convenientemente todas as escolhas), resolva-o por um algoritmo estudado e interprete a solução encontrada (bem como o valor da função objetivo).
3. Considere um problema de transporte equilibrado em que todos os custos unitários de transporte são inteiros. Mostre que o seu dual tem pelo menos uma solução ótima inteira.
4. Uma companhia aérea está a estudar a compra de novos aviões para as suas rotas de curto, médio e longo curso. No caso do longo curso há dois tipos de aviões, oferecidos por dois construtores diferentes, L1 e L2. Cada avião custa 35 milhões de euros (ME), 50 ME e 67 ME, respetivamente, para as rotas de curto, médio e longo curso. O conselho de administração está autorizado a gastar até 1500 ME nestas compras. Tendo em conta as previsões de utilização dos aviões, o lucro anual estimado por cada avião é de 2.3 ME, 3 ME, 5 ME e 4 ME, respetivamente para os aviões de curto, médio e longo curso L1 e L2. Existem pilotos treinados para constituir tripulações correspondentes a 30 novos aviões. Os serviços de manutenção têm capacidade para 40 novos aviões de curto curso, se só forem comprados aviões deste tipo. Contudo, em termos de utilização destes serviços, 3 aviões de médio curso são equivalentes a 4 aviões de curto curso, e 3 aviões de longo curso L1 são equivalentes a 5 aviões de curto curso. Ainda em termos de manutenção, cada avião de longo curso L2 é equivalente a um avião de médio curso. Estabeleça um modelo de programação inteira para resolver este problema tendo como objetivo a maximização do lucro.

Cotações:

1a	1b	1c	1d i	1d ii	1d iii	2	3	4
2,5	2	2	2	2	2	3	2	2,5

Boa sorte! 😊