

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA I

15 de maio de 2025

Época Normal 2024/2025

Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. Uma empresa está a estudar a produção de três novos produtos, P1, P2 e P3. Pretende maximizar a receita, não ultrapassando as 210 horas de trabalho disponíveis, consumindo pelo menos 150 unidades de uma substância que está em fim de validade e respeitando a indicação da secção de marketing. Com esse propósito foi formalizado o problema de PL seguinte

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{s. a } &\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 150 \\ x_2 + x_3 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

cujo quadro ótimo é

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2ºmembro
z	1	0	0	0	12	13	4	370
x_2	0	0	1	0	4	5	1	40
x_1	0	1	0	0	1	1	1	10
x_3	0	0	0	1	-4	-5	-2	10

e onde x_i representa a quantidade a produzir do produto P_i , $i = 1, 2, 3$, e x_4, x_5 e x_6 são as variáveis auxiliares associadas à primeira, segunda e terceira restrições, respetivamente.

- Escreva o dual do problema apresentado e indique uma sua solução ótima.
- Faça um pequeno relatório com toda a informação que puder retirar do quadro.
- O responsável não compreende como é que se produz tanto do produto mais barato como do mais caro, por isso, quer aumentar o preço de venda do mais barato, desde que isso não altere o plano ótimo de produção. Para quanto pode aumentar esse preço?
- Está a estudar-se a inclusão de um novo produto que tem um consumo unitário de 2 horas de trabalho e 2 unidades da substância acima referida, sendo vendido por 1. Quanto se deve produzir do novo produto?
- A secção de marketing quer retirar a sua indicação sobre a quantidade a produzir de P2 e P3. A partir do quadro apresentado, determine as consequências exatas dessa decisão.

2. Uma empresa tem três armazéns de cereais (A1, A2 e A3) que vai usar para abastecer dois dos seus clientes, C1 e C2. A empresa assumiu o compromisso de fornecer 35 toneladas ao cliente C1 e 45 toneladas ao cliente C2. Nos contratos foi assumido ainda que a empresa pagaria 50 u.m. por cada tonelada não fornecida ao cliente C1 e 60 u.m. por cada tonelada não fornecida ao cliente C2.

A tabela seguinte contém os custos de transporte, por tonelada, dos armazéns para os clientes, bem como as quantidades disponíveis nos armazéns.

	Oferta (ton.)	Custo de transporte para	
		C1	C2
A1	20	100	120
A2	28	110	105
A3	25	95	90

A empresa pretende enviar aos seus clientes todos os cereais disponíveis de modo a minimizar os custos totais.

- Formalize este problema como um Problema de Transporte.
- Determine uma solução básica admissível pelo método do canto superior esquerdo.
- Resolva-o pelo algoritmo de Dantzig.
- Existe alguma forma ótima de o cliente C2 receber quantidades iguais dos armazéns A2 e A3? Justifique.

3. Uma empresa abriu um concurso para três diferentes funções (F1, F2 e F3), avaliou os candidatos numa escala de 0 a 100 (em que 100 é o máximo) e selecionou os quatro melhores candidatos (C1, C2, C3 e C4) para serem funcionários da empresa. Estes quatro candidatos obtiveram as seguintes classificações

	F1	F2	F3
C1	84	86	91
C2	92	90	87
C3	90	91	86
C4	91	88	85

Cada um dos quatro recentes funcionários vai ser selecionado para exercer uma única função e é necessário um trabalhador para cada função, exceto para F2, que precisa de duas pessoas.

Formule e resolva um problema de otimização que permita afetar os quatro trabalhadores às funções, de modo a obter a melhor média possível.

4. Considere as seguintes afirmações:

- Se a região admissível de um problema de PL é ilimitada, o seu dual não tem ótimo finito.
- A introdução de uma nova variável num problema de PL pode não afetar a região admissível do respetivo dual.

Indique se são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas, apresentando um contraexemplo em caso de falsidade.

Cotações

1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	2d	3	4
1.5	2.5	2	2	2	1.5	1	2	1	2	2.5