

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA I

15 de maio de 2025

Época Normal 2024/2025

Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. Uma empresa está a estudar a produção de três novos produtos, P1, P2 e P3. Pretende maximizar a receita, não ultrapassando as 210 horas de trabalho disponíveis, consumindo pelo menos 150 unidades de uma substância que está em fim de validade e respeitando a indicação da secção de marketing. Com esse propósito foi formalizado o problema de PL seguinte

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ s. a & \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 150 \\ x_2 + x_3 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

cujo quadro ótimo é

| VB | z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | 2ºmembro |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| z | 1 | 0 | 0 | 0 | 12 | 13 | 4 | 370 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 1 | 40 |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| x_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | -5 | -2 | 10 |

e onde x_i representa a quantidade a produzir do produto P_i , $i = 1,2,3$, e x_4, x_5 e x_6 são as variáveis auxiliares associadas à primeira, segunda e terceira restrições, respetivamente.

- Escreva o dual do problema apresentado e indique uma sua solução ótima.
- Faça um pequeno relatório com toda a informação que puder retirar do quadro.
- O responsável não comprehende como é que se produz tanto do produto mais barato como do mais caro, por isso, quer aumentar o preço de venda do mais barato, desde que isso não altere o plano ótimo de produção. Para quanto pode aumentar esse preço?
- Está a estudar-se a inclusão de um novo produto que tem um consumo unitário de 2 horas de trabalho e 2 unidades da substância acima referida, sendo vendido por 1. Quanto se deve produzir do novo produto?
- A secção de marketing quer retirar a sua indicação sobre a quantidade a produzir de P2 e P3. A partir do quadro apresentado, determine as consequências exatas dessa decisão.

2. Uma empresa tem três armazéns de cereais (A1, A2 e A3) que vai usar para abastecer dois dos seus clientes, C1 e C2. A empresa assumiu o compromisso de fornecer 35 toneladas ao cliente C1 e 45 toneladas ao cliente C2. Nos contratos foi assumido ainda que a empresa pagaria 50 u.m. por cada tonelada não fornecida ao cliente C1 e 60 u.m. por cada tonelada não fornecida ao cliente C2.

A tabela seguinte contém os custos de transporte, por tonelada, dos armazéns para os clientes, bem como as quantidades disponíveis nos armazéns.

| | Oferta (ton.) | Custo de transporte para | |
|----|---------------|--------------------------|-----|
| | | C1 | C2 |
| A1 | 20 | 100 | 120 |
| A2 | 28 | 110 | 105 |
| A3 | 25 | 95 | 90 |

A empresa pretende enviar aos seus clientes todos os cereais disponíveis de modo a minimizar os custos totais.

- Formalize este problema como um Problema de Transporte.
- Determine uma solução básica admissível pelo método do canto superior esquerdo.
- Resolva-o pelo algoritmo de Dantzig.
- Existe alguma forma ótima de o cliente C2 receber quantidades iguais dos armazéns A2 e A3? Justifique.

3. Uma empresa abriu um concurso para três diferentes funções (F1, F2 e F3), avaliou os candidatos numa escala de 0 a 100 (em que 100 é o máximo) e selecionou os quatro melhores candidatos (C1, C2, C3 e C4) para serem funcionários da empresa. Estes quatro candidatos obtiveram as seguintes classificações

| | F1 | F2 | F3 |
|----|----|----|----|
| C1 | 84 | 86 | 91 |
| C2 | 92 | 90 | 87 |
| C3 | 90 | 91 | 86 |
| C4 | 91 | 88 | 85 |

Cada um dos quatro recentes funcionários vai ser selecionado para exercer uma única função e é necessário um trabalhador para cada função, exceto para F2, que precisa de duas pessoas.

Formule e resolva um problema de otimização que permita afetar os quatro trabalhadores às funções, de modo a obter a melhor média possível.

4. Considere as seguintes afirmações:

- Se a região admissível de um problema de PL é ilimitada, o seu dual não tem ótimo finito.
- A introdução de uma nova variável num problema de PL pode não afetar a região admissível do respetivo dual.

Indique se são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas, apresentando um contraexemplo em caso de falsidade.

Cotações

| 1a | 1b | 1c | 1d | 1e | 2a | 2b | 2c | 2d | 3 | 4 |
|-----|-----|----|----|----|-----|----|----|----|---|-----|
| 1.5 | 2.5 | 2 | 2 | 2 | 1.5 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2.5 |