

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA I

6 de junho de 2025

Época de Recurso 2024/2025

Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. Uma empresa alimentar pretende fabricar, ao menor custo possível, 40 toneladas de uma farinha a partir de três ingredientes. Para o efeito tem disponíveis 180 horas-máquina. Essas 40 toneladas de farinha têm de conter, no mínimo, 120 unidades de um importante nutriente. Para dar resposta ao pretendido foi formalizado o seguinte PL (x_i representa a quantidade do ingrediente i que faz parte da farinha, $i = 1,2,3$)

$$\min z = 11x_1 + 8x_2 + 12x_3$$

$$s. a: \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 180 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 120 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

que se resolveu pelo Simplex, obtendo-se o quadro ótimo

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_1	R_2	2ºmembro
z(min)	1	-1	0	0	-2	0	-	-	360
x_2	0	1/2	1	0	1/2	0	0	-3/2	30
x_3	0	1/2	0	1	-1/2	0	0	5/2	10
x_5	0	3	0	0	-1	1	-1	9	60

onde x_4 e x_5 são as variáveis auxiliares associadas à primeira e à segunda restrição, respetivamente, e R_1 e R_2 são as variáveis artificiais associadas à segunda e à terceira restrição, respetivamente.

- Apresente a solução ótima do problema e a do seu dual e interprete os valores obtidos.
- É possível aumentar o número de horas máquina disponíveis para 195 ou para 210, consoante o equipamento escolhido. Estude as consequências no custo de cada uma das possibilidades.
- O custo do ingrediente 3 desceu para 9. Qual vai ser a composição da farinha? E o seu custo?
- Está a estudar-se a possibilidade de incluir mais um ingrediente na farinha. Cada tonelada desse ingrediente exige 4 h.m. de processamento, contém 3 unidades do nutriente e custa 9 u.m. Este novo ingrediente deve ser incluído? Em caso afirmativo, qual a nova composição da farinha?

2. Considere o seguinte problema de PL

$$\max z = 60x_1 + 120x_2$$

$$s. a: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Escreva o seu dual e obtenha a sua solução ótima usando as relações de complementaridade.
- c) Faça a análise de sensibilidade ao segundo membro da primeira restrição.

3. Uma empresa possui duas fábricas de produção de papel. A fábrica 1 produz papel do tipo A e a fábrica 2 produz papel de tipo B, necessitando mensalmente de, respetivamente, 40 e 50 toneladas de pasta de papel em cada fábrica.

A pasta de papel é comprada a três fornecedores. Dois desses fornecedores produzem a referida pasta a partir de eucalipto e oferecem, por mês, 35 e 20 toneladas a um preço de 13 e 11 u.m./tonelada respetivamente.

O terceiro fornecedor produz a pasta de papel com base em papel reciclado, vendendo a pasta a um preço de 10 u.m./tonelada. Este fornecedor não impõe limitações à quantidade a fornecer, podendo fornecer a totalidade da procura.

A empresa pretende que o papel de tipo B inclua, pelo menos, 60% de pasta de papel proveniente de papel reciclado. Os custos de transporte da pasta de papel dos fornecedores para as fábricas são dados pela tabela seguinte

	Fábrica 1	Fábrica 2
Fornecedor 1	2	4
Fornecedor 2	3	3
Fornecedor 3	6	4

- a) Determine o plano de abastecimentos que a empresa deve adotar de modo a minimizar os custos. Comece o algoritmo com uma solução obtida pelo método do canto superior esquerdo.
- b) Uma vez que os acessos à fábrica 2 irão ser melhorados, prevê-se que os custos de transporte da pasta de papel do primeiro fornecedor para esta fábrica diminuam. Indique quanto é que esse custo teria de diminuir para que houvesse alteração do plano ótimo de abastecimento.

Cotação:

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3a	3b
3	2	2	2	1.5	2	2	4	1.5